

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
& d'Informatique
Rabat, Maroc

Cours d'Analyse 4

Zine El Abidine ABDELALI

Table des matières

Chapitre 1. Notions sur la topologie de \mathbb{R}	7
1. Rappel de quelques propriétés de \mathbb{R} .	7
2. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	8
3. Suites de Cauchy dans \mathbb{R} .	9
4. Notions sur la topologie de \mathbb{R} .	11
5. Applications continues et parties compacts.	14
6. EXERCICES.	15
7. Série n° 1	17
Chapitre 2. Séries numériques	23
1. Suites dans \mathbb{C} .	23
2. Séries numériques.	23
3. Séries numériques à termes positifs.	27
4. Règles de convergence.	28
5. Comparaison série-intégrale.	30
6. Série à termes réels ou complexes.	31
7. Série n° 2.	35
Chapitre 3. Espaces vectoriels normés	41
1. Définitions générales.	41
2. Espaces vectoriels normés de dimension finie.	49
3. Série n° 3.	56
Chapitre 4. Suites et séries de fonctions	61
1. Suites de fonctions.	61
2. Différents types de convergence pour les séries de fonctions.	66
3. Séries entières.	71
4. Série n° 4.	77
Chapitre 5. Intégrales dépendant d'un paramètre	85

1. Série n° 5.	85
Chapitre 6. Calcul différentiel	91
1. Applications différentiables.	91
2. Dérivées partielles et applications continument différentiables.	94
3. C^k difféomorphismes.	97
4. Dérivées partielles d'ordre supérieure.	99
5. Extremums relatifs.	101
6. Série n° 6.	102

CHAPITRE 1

Notions sur la topologie de \mathbb{R}

1. Rappel de quelques propriétés de \mathbb{R} .

Propriété 1.1. (*Caractérisation de \mathbb{R}*) *L'ensemble \mathbb{R} possède les propriétés suivantes :*

- 1) $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ est un corps comutatif totalement ordonné,
- 2) \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure,
- 3) \mathbb{R} est un corps archimédien.

Exercices 1.1. 1) *Déduire de la propriété 1.1, que \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne inférieure.*

2) *Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée), alors elle est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).*

3) *Vérifier que la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.*

Remarque 1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut définir :

- 1) La valeur absolue $|x| = \max\{-x, x\}$.
 - L'existence de la valeur absolue découle de 1) propriété 1.1.
- 2) La partie entière $[x]$ qui n'est autre que l'unique entier relatif vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.
 - L'existence de la partie entière découle de 2) propriété 1.1, et le fait que \mathbb{N} est bien-ordonné.

Définition 1.1. Un sous ensemble A de \mathbb{R} est dit dense dans \mathbb{R} si tout élément de \mathbb{R} est une limite d'une suite d'éléments de A .

Proposition 1.1. \mathbb{Q} dense dans \mathbb{R} .

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\frac{[10^n \cdot x]}{10^n} \leq x < \frac{[10^n \cdot x] + 1}{10^n},$$

ainsi

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^n \cdot x]}{10^n}. \quad \square$$

Exercices 1.2. 1) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans \mathbb{R} .

2) Montrer q'un sous ensemble A de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si, et seulement si, tout intervalle, non vide, $]a, b[$ de \mathbb{R} contient un élément de A .

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Définition 1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, on appelle sous suite extraite de $(u_n)_n$, toute suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_n$ où $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque 1.2. 1) On a pour tout entier n , $\sigma(n) \geq n$.

2) On a $(u_n)_n$, $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$, $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$, $(u_{3n+2})_n$ sont des sous suites extraites de la suite $(u_n)_n$.

3) Si $(k_n)_n$ est une suite d'entier strictement croissante, alors $(u_{k_n})_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$.

4) Une sous suite extraite d'une sous suite extraite de $(u_n)_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$.

Proposition 1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, on a

1) si $(u_n)_n$ converge vers une limite l , alors toute sous suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l .

2) si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toute sous suite extraite tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Exercice. \square

Remarque 1.3. 1) Si deux sous suites extraites d'une suite $(u_n)_n$ convergent vers deux limites différentes, alors la suite est divergente.

2) La proposition précédente donne une méthode pour démontrer que certaines suites ne sont pas convergentes. Par exemple la suite $((-1)^n)_n$ est divergente, car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}.$$

Une propriété équivalente à celle de la borne supérieure et le théorème suivant :

Théorème 1.1. (de Bolzano-Weierstrass) Toute suite réelle bornée admet une sous suite extraite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe un segment $[m, M]$ qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les deux suites définies par $a_0 = m$, $b_0 = M$, et si $\{k \in \mathbb{N} : u_k \in [a_n, b_n]\}$ est infini

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

dans l'autre cas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

alors on a $(a_n)_n$ est une suite croissante, $(b_n)_n$ est une suite décroissante et $b_n - a_n = \frac{M-m}{2^n} \rightarrow 0$. Donc $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite l . Rappelons que pour tout entier n l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_k) . Posons $k_0 = 0$ et choisissons pour tout $n > 0$ un entier k_n vérifiant

$$k_n > \max\{k_0, \dots, k_{n-1}\} \text{ et } u_{k_n} \in [a_n, b_n]$$

Alors $(u_{k_n})_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$ et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = l$. \square

3. Suites de Cauchy dans \mathbb{R} .

Définition 1.3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy peut être aussi s'énoncer ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Exercices 1.3. Vérifier qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si, et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ où

$$M_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} |u_{n+p} - u_n| = 0.$$

Attention 1.1. La suite $(\ln(n+1))_n$, est une suite qui vérifie pour chaque entier p fixe

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \ln\left(\frac{n+p+1}{n+1}\right) \right|$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+p} - u_n| = 0$$

Mais $(\ln(n+1))_n$ n'est pas une suite de Cauchy car par exemple on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{2n+1} - u_n| = \ln(2) \not\rightarrow 0.$$

Proposition 1.3. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite l , alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

par suite

$$\forall n \geq N, \forall m \geq N, |u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| < 2\varepsilon. \square$$

Proposition 1.4. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$ ainsi $|u_n| \leq 1 + |u_N|$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leq M$, où $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$. \square

Théorème 1.2. *Toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Donc elle est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite extraite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l . Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_{\sigma(n)} - l| < \varepsilon$$

il existe aussi un entier N_2 tel que

$$\forall n, m \geq N_2, |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, pour tout $n \geq N$ on a :

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\sigma(N)}| + |u_{\sigma(N)} - l| < 2\varepsilon. \square$$

On dit alors que \mathbb{R} est un **espace complet**.

Exemples 1.1. *L'espace \mathbb{Q} n'est pas complet.*

4. Notions sur la topologie de \mathbb{R} .

4.1. Voisinages, ouverts et fermés dans \mathbb{R} .

Définition 1.4. Soit $x \in \mathbb{R}$, un voisinage V de x est un sous ensemble de \mathbb{R} contenant un intervalle centré en x .

Remarque 1.4. 1) Un ensemble V est un voisinage d'un élément x si, et seulement si, V contient un intervalle ouvert contenant x .

- 2) Si V est un voisinage de x et $W \supset V$, alors W est un voisinage de x .
- 3) Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x .
- 4) Une réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x .

Définition 1.5. 1) Un sous ensemble O de \mathbb{R} est dit ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points.

2) Un sous ensemble F de \mathbb{R} est dit fermé si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert.

Exemples 1.2. 1) L'ensemble \mathbb{R} et l'ensemble vide sont des ouverts et des fermés.

2) Les ouverts sont stables par réunion quelconque et par les intersections finies.

3) Un intervalle ouvert est un ouvert.

4) Une réunion quelconque d'intervalles ouverts est un ouvert.

5) Un intervalle fermé est un fermé. En effet, $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ est un ouvert.

6) Un singleton est un fermé.

7) Un ensemble fini est un fermé.

8) L'ensemble \mathbb{Z} est un fermé dans \mathbb{R} .

Exercices 1.4. Soit E un sous ensemble de \mathbb{R} .

1) Montrer que l'ensemble \mathbf{F} des fermés de \mathbb{R} contenant E est non vide et $\bigcap_{F \in \mathbf{F}} F$ est le plus petit fermé contenant E .

2) Montrer que l'ensemble \mathbf{O} des ouverts de \mathbb{R} contenus dans E est non vide et $\bigcup_{O \in \mathbf{O}} O$ est le plus grand ouvert contenu dans E .

Définition 1.6. 1) L'intérieur d'un ensemble E , noté $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E .

2) L'adhérence d'un ensemble E , noté \bar{E} est le plus petit fermé contenant E .

4.2. Ouverts et fermés d'une partie de \mathbb{R} . Soit A un sous ensemble de \mathbb{R} et soit $x \in A$, alors on a la définition suivante :

Définition 1.7. 1) Un voisinage V de x dans A est une intersection d'un voisinage W de x dans \mathbb{R} et A .

2) Un ouvert O dans A est une intersection d'un ouvert U dans \mathbb{R} et A .

3) Un fermé F dans A est une intersection d'un fermé H dans \mathbb{R} et A .

Remarque 1.5. 1) Toutes les propriétés vérifiées par les voisinages (resp. ouverts, fermés) restent vraies pour les voisinages (resp. ouverts, fermés) relativement à un sous ensemble de \mathbb{R} .

2) Si A est un sous ensemble fermé dans \mathbb{R} , alors un sous ensemble F de A est fermé dans A si, et seulement si, il est fermé dans \mathbb{R} .

3) Si A est un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R} , alors un sous ensemble O de A est ouvert dans A si, et seulement si, il est ouvert dans \mathbb{R} .

4) En général les voisinages (resp. ouverts, fermés) relativement à un sous ensemble de \mathbb{R} ne sont pas nécessairement des voisinages (resp. ouverts, fermés) dans \mathbb{R} .

4.3. Limites et continuité.

Proposition 1.5. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et soit $l \in \mathbb{R}$, alors on a l'équivalence :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l,$$

2) pour tout voisinage V de l , il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in V$.

Définition 1.8. Soit f une application définie d'une partie A de \mathbb{R} à valeurs réelles. Soit $x_0 \in \overline{A}$,

1) on dit que f converge vers un élément $y_0 \in \mathbb{R}$ lorsque x converge vers x_0 , et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, : \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \eta \\ \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon,$$

2) si $x_0 \in A$, f est dite continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

3) f est continue sur A , si f est continue en tout point x de A .

Proposition 1.6. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une applications. Alors

1) Pour un élément $x \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f est continue au point x ,
- b) l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x dans A ,
- c) pour toute suite $(u_n)_n$ dans A qui converge vers x , la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f est continue sur A ,
- b) l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert de A ,
- c) l'image réciproque de tout fermé est un fermé de A .

Remarque 1.6. On a les critères pratiques suivants pour reconnaître certains ouverts et fermés de \mathbb{R} .

1) Si F est un fermé dans \mathbb{R} , si de plus f_1, f_2, \dots, f_n sont des applications, à valeurs réelles, continues sur F , alors l'ensemble $\{x \in F : f_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ est un fermé dans \mathbb{R} .

2) Si O est un ouvert dans \mathbb{R} , si de plus f_1, f_2, \dots, f_n sont des applications, à valeurs réelles, continues sur O , alors l'ensemble $\{x \in O : f_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$ est un ouvert dans \mathbb{R} .

4.4. Parties fermées et suites.

Proposition 1.7. Soit F sous ensemble de \mathbb{R} , alors on a l'équivalence :

- 1) F est fermé dans \mathbb{R} ,
- 2) pour toute suite $(u_n)_n \subseteq F$, qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, on a $l \in F$.

Démonstration. Soit F un fermé dans \mathbb{R} , et supposons que $(u_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge dans \mathbb{R} vers une limite l . Supposons que $l \notin F$, donc l est in élément de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus F$. Donc il existe un entier N , tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in \mathbb{R} \setminus F$. En particulier $u_N \in \mathbb{R} \setminus F$, absurde.

Réciproquement, Supposons que 2) est vraie et que F n'est pas fermé, donc $\mathbb{R} \setminus F$ n'est pas un ouvert. Donc il existe $a \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que aucun intervalle centré en a n'est contenu dans $\mathbb{R} \setminus F$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \cap]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ est non vide, soit x_n un élément quelconque de cette intersection. La suite $(x_n)_n$, est une suite d'éléments de F qui converge vers $a \notin F$, ce qui est absurde. \square

Exercices 1.5. I) Soit A une partie de \mathbb{R} , montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $x \in \overline{A}$,

2) x est une limite d'une suite d'éléments de A

3) $\inf\{|x - a| : a \in A\} = 0$.

II) Un sous ensemble A de \mathbb{R} est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans A est convergente dans A . Montrer A est complet si et seulement si A est fermé.

Définition 1.9. Soit F un ensemble fermé un sous ensemble A de F est dit **dense** dans F si $\overline{A} = F$.

Exemples 1.3. 1) L'ensemble \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

2) L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dense dans $[0, 1]$.

5. Applications continues et parties compacts.

Définition 1.10. Un sous ensemble K de \mathbb{R} est dit **compact** si toute suite d'éléments de K admet une sous suite extraite qui converge dans K .

Proposition 1.8. *Les compact dans \mathbb{R} sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. Soit K est une parties fermée bornée de \mathbb{R} . Si $(u_n)_n$ est une suite d'élément de K , alors $(u_n)_n$ est bornée donc elle possède une sous suite extraite $(u_{\sigma(n)})_n$ convergente dans \mathbb{R} . L'ensemble K est fermé donc la limite de $(u_{\sigma(n)})_n$ est un élément de K , ainsi K est un compact.

Inversement, supposons que K est un compact, alors K est borné sinon il existe alors une suite d'éléments de K qui diverge vers ∞ ou $-\infty$. Une telle suite ne possède aucune sous suite extraite convergente, absurde donc K est borné. L'ensemble K est fermé, car pour tout $x \in \overline{K}$ il existe une suite $(u_n)_n$ dans K qui converge vers x . Donc il existe une sous suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge dans K , une telle sous suite converge vers x , ainsi $x \in K$. \square

Exercices 1.6. *Tout compact de \mathbb{R} admet un plus grand élément et un plus petit élément.*

Proposition 1.9. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Démonstration. Soit K un compact est f une application continue sur K . Soit $(y_n)_n$ une suite dans $f(K)$, pour tout entier n il existe $x_n \in K$, tel que $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_n$ possède une sous suite extraite $(x_{\sigma(n)})_n$ convergente vers un élément x de K , f est continue en x donc la suite $(f(x_{\sigma(n)}))_n$ qui n'est autre que la sous suite extraite $(y_{\sigma(n)})_n$ de $(y_n)_n$, converge vers $f(x) \in f(K)$. D'où $f(K)$ est un compact. \square

Corollaire 1.1. *Toute application continue d'un compact de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est bornée et elle atteint ses bornes.*

Démonstration. Exercice. \square

Définition 1.11. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on dit que f est uniformément continue sur A si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \quad & \forall x, y \in A, |x - y| < \eta \\ & \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Remarque 1.7. 1) Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, si f est uniformément continue sur un ensemble A , alors f est continue sur A .

2) L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R} , mais elle n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

3) L'application $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^{-1}$ est continue sur $]0, 1[$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

Théorème 1.3. (de Heine) *Toute application continue sur un ensemble fermé borné est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que E est un fermé borné et que f est continue mais non uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n > 1$, il existe $x_n, y_n \in E$ vérifiant $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Il existe une sous suite extraite $(x_{\sigma(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément $l \in E$.

On a $|x_n - y_n| < 1/n$, donc $(y_{\sigma(n)})_n$ converge vers l .

La fonction f est continue au point l , donc $(f(x_{\sigma(n)}))_n$ et $(f(y_{\sigma(n)}))_n$ converge vers $f(l)$, ceci contredit le fait que $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$. \square

6. EXERCICES.

Exercice 1.1. Soit $u = (u_n)_n$ une suite.

1) Vérifier que si les deux sous suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite, alors u est convergente.

2) Vérifier que si les sous suites extraites $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent, alors u est convergente.

Exercice 1.2. Donner la nature des suites suivantes :

$$\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right), \frac{n^2 + \sqrt{n}}{(n+1)^2 \cos\left(n\frac{\pi}{5}\right)}$$

Exercice 1.3. (e est irrationnel) Soient u et v les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

1) Vérifier que u et v sont deux suites adjacentes.

2) Soit l leur limite commune et supposons que l est un rationnel, c'est à dire que $l = p/q$ pour un certain $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

a) dire pour quoi $u_q < l < v_q$,

b) déduire un encadrement de

$$N = \left(l - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \cdot q!,$$

c) le nombre N est-il un entier, conclure.

3) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que pour tout entier n ,

$$|e - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

4) conclure que e est irrationnel.

Exercice 1.4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que l'image de toute suite convergente est une suite convergente. Montrons que f est continue.

1) Soient $x \in I$ et $(u_n)_n$ une suite de I qui converge vers x , construire dans I une suite convergente $(w_n)_n$ admettant $(u_n)_n$ et une suite constante comme deux sous suites extraites.

2) Que peut on dire de la suite $(f(w_n))_n$.

3) En déduire que la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$, conclure.

Exercice 1.5. I) Vérifier que pour tout réel $\omega > 0$, l'ensemble $(\omega\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe additif fermé de \mathbb{R} .

II) Soit $(G, +)$ un sous groupe additif propre de \mathbb{R} , supposons de plus que G est fermé. Posons $\omega = \inf\{g \in G : g > 0\}$.

1) supposons que $\omega = 0$,

a) vérifier qu'il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $]0, 1] \cap G$ qui converge vers zéro.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ vérifier que pour tout entier n il existe un entier u_n tel que $u_n g_n \leq x < (u_n + 1) \cdot g_n$.

c) En déduire que la suite $(u_n g_n)_n$ admet une sous suite extraite convergente.

d) Vérifier que cette sous suite extraite converge vers x .

e) En déduire que $x \in G$, et que $\mathbb{R} \subseteq G$, conclure.

2) D'après ce qui précède $\omega > 0$,

a) vérifier que $\omega \in G$,

b) montrer que $G = \omega\mathbb{Z}$ (Ind. s'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}^+$ qui n'est pas de la forme $\omega\mathbb{N}$, considérer l'élément $g - [g/\omega]\omega$).

III) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x/π est irrationnel, et soit $E = \{\cos(nx) : n \in \mathbb{Z}\}$.

1) Vérifier que $E = \{\cos(g) : g \in G\}$ où $G = x\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

2) Vérifier que G est dense dans \mathbb{R} .

3) Conclure que E est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 1.6. Soit I un intervalle fermé et soit f une application contractante, c'est à dire k -lipschitzienne $0 < k < 1$. Supposons de plus que $f(I) \subseteq I$.

1) Soit $x \in I$, montrer $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

2) En déduire que f admet un point fixe unique.

3) Que peut on dire dans les deux cas suivants :

a) f est lipschitzienne, c'est à dire 1-lipschitzienne,

b) I n'est pas fermé.

Exercice 1.7. Montrer qu'une application continue sur $[0, 1[$ est uniformément continue si, et seulement si, elle est prolongeable par continuité au point 1.

7. Série n° 1

Exercice 1. Soit $u = (u_n)_n$ une suite.

1) Vérifier que si les deux sous suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite, alors u est convergente.

2) Vérifier que si les sous suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent, alors u est convergente.

3) Vérifier que si les sous suites extraites $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent, alors u est convergente.

Exercice 2. Donner la nature des suites suivantes :

$$\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right), \frac{n^2 + \sqrt{n}}{(n+1)^2 \cos\left(n\frac{\pi}{5}\right)}$$

Exercice 3. (e est irrationnel) Soient u et v les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

1) Vérifier que u et v sont deux suites adjacentes.

2) Soit l leur limite commune et supposons que l est un rationnel, c'est à dire que $l = p/q$ pour un certain $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

a) dire pour quoi $u_q < l < v_q$,

b) déduire un encadrement de

$$N = \left(l - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \cdot q!,$$

c) le nombre N est-il un entier, conclure.

3) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que pour tout entier n ,

$$|e - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

4) conclure que e est irrationnel.

Exercice 4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que l'image de toute suite convergente est une suite convergente. Montrons que f est continue.

1) Soient $x \in I$ et $(u_n)_n$ une suite de I qui converge vers x , construire dans I une suite convergente $(w_n)_n$ admettant $(u_n)_n$ et une suite constante comme deux sous suites extraites.

2) Que peut on dire de la suite $(f(w_n))_n$.

3) En déduire que la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$, conclure.

Exercice 5. I) Vérifier que pour tout réel $\omega > 0$, l'ensemble $(\omega\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe additif fermé de \mathbb{R} .

II) Soit $(G, +)$ un sous groupe additif propre de \mathbb{R} , supposons de plus que G est fermé. Posons $\omega = \inf\{g \in G : g > 0\}$.

1) supposons que $\omega = 0$,

a) vérifier qu'il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $]0, 1] \cap G$ qui converge vers zéro.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ vérifier que pour tout entier n il existe un entier u_n tel que $u_n g_n \leq x < (u_n + 1) \cdot g_n$.

c) Vérifier que la suite $(u_n g_n)_n$ converge vers x .

d) En déduire que $x \in G$, et que $\mathbb{R} \subseteq G$, conclure.

2) D'après ce qui précède $\omega > 0$,

a) vérifier que $\omega \in G$,

b) montrer que $G = \omega\mathbb{Z}$ (Ind. s'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}^+$ qui n'est pas de la forme ωN , considérer l'élément $g - [g/\omega]\omega$).

III) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x/π est irrationnel, et soit $E = \{\cos(nx) : n \in \mathbb{Z}\}$.

1) Vérifier que $E = \{\cos(g) : g \in G\}$ où $G = x\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

2) Vérifier que G est dense dans \mathbb{R} .

3) Conclure que E est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6. Soit I un intervalle fermé et soit f une application contractante, c'est à dire k -lipschitzienne $0 < k < 1$. Supposons de plus que $f(I) \subseteq I$.

1) Soit $x \in I$, montrer $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

2) En déduire que f admet un point fixe unique.

3) Que peut on dire dans les deux cas suivants :

a) f est lipschitzienne, c'est à dire 1-lipschitzienne,

b) I n'est pas fermé.

Exercice 7. Montrer qu'une application continue sur $[0, 1[$ est uniformément continue si, et seulement si, elle est prolongeable par continuité au point 1 (Ind. Si f est uniformément continue, soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $[0, 1[$ qui converge vers 1, vérifier que $(f(u_n))_n$ est de Cauchy donc elle converge vers un réel l . Soit $(v_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de $[0, 1[$ qui converge vers 1 vérifier que $(f(v_n))_n$ converge vers l).

Série 1, Solution.

Exercice 5. II) 1) a) Par hypothèse $0 = \inf\{g \in G : g > 0\}$, donc pour tout entier $n > 0$, il existe $g_n \in \{g \in G : g > 0\}$ tel que $0 \leq g_n < 1/n$. D'où $(g_n)_n \subseteq]0, 1] \cap G$ et $g_n \rightarrow 0$.

b) Il suffit de poser $u_n = [x/g_n]$ (partie entière de x/g_n).

c) On a $0 \leq x - u_n g_n < g_n$ et $g_n \rightarrow 0$. Donc $(u_n g_n)_n$ converge vers x .

d) G est fermé, $(g_{\sigma(n)})_n \subseteq G$ et $u_n g_n \rightarrow x$. Donc $x \in G$. Donc $\mathbb{R}^+ \subseteq G$, or G est un groupe donc $\mathbb{R}^- \subseteq G$.

2) a) Par hypothèse $\omega = \inf\{g \in G : g > 0\}$, donc pour tout entier $n > 0$, il existe $g_n \in \{g \in G : g > 0\}$ tel que $\omega \leq g_n < \omega + 1/n$. D'où $(g_n)_n \subseteq G$ et $g_n \rightarrow \omega$. D'où $\omega \in G$ car G est fermé.

b) Si $g \in G$ et $g \geq 0$. Posons $g' = g - [g/\omega]\omega$. On a $g' \in G$ et $0 \leq g' < \omega$ donc $g' = 0$ car $\omega = \inf\{g \in G : g > 0\}$. D'où $g = [g/\omega]\omega \in \omega\mathbb{N}$.

III) 2) a) \overline{G} est aussi un groupe car $\overline{G} \neq \emptyset$ et si $x, y \in \overline{G}$, il existe $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites dans G telles que $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$, d'où $x_n - y_n \rightarrow x - y$, ainsi $x - y \in \overline{G}$.

b) Si \overline{G} est de la forme $\omega\mathbb{Z}$, alors $x\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = G \subseteq \omega\mathbb{Z}$. Ainsi $x \in \omega\mathbb{Z}$ et $\pi \in \omega\mathbb{Z}$. Donc il existe $n, m \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \omega n$ et $y = \omega m$. Ainsi $x/\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

3) Soit $y \in [-1, 1]$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) = y$. Il existe $(g_n)_n \subseteq G$ telle que $g_n \rightarrow x$, donc $\cos(g_n) \rightarrow y$, mais pour tout entier n , $g_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in x\mathbb{Z}$ et $b_n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $\cos(a_n) = \cos(g_n) \rightarrow y$, remarquons que $(\cos(a_n))_n \subseteq E$ d'où E est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6. On a pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. fixons $x \in I$.

1) Soit $m \geq n$,

$$\begin{aligned} |f^m(x) - f^n(x)| &= |(f^m(x) - f^{m-1}(x)) + (f^{m-1}(x) - f^{m-2}(x)) + \dots + (f^{n+1}(x) - f^n(x))| \\ &\leq |f^m(x) - f^{m-1}(x)| + |f^{m-1}(x) - f^{m-2}(x)| + \dots + |f^{n+1}(x) - f^n(x)| \end{aligned}$$

Or on a pour tout entier k , $|f^{n+1}(x) - f^n(x)| \leq k^n |f(x) - x|$. D'où

$$|f^m(x) - f^n(x)| \leq k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + k^n = k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k}$$

Ainsi $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers une limite a .

2) On a $a \in I$, car $f(I) \subseteq I$. Donc

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = a.$$

3) Posons $I = \mathbb{R}$, $x \rightarrow x + 1$ est 1-lipschitzienne mais elle n'admet aucun point fixe.

4) Pour $I =]0, 1]$, $x \rightarrow x/2$ est $1/2$ -lipschitzienne mais elle n'admet aucun point fixe.

Exercice 7. Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, une application.

1) Si f est prolongeable par continuité au point 1 en une fonction g , alors g est continue sur le compact $[0, 1]$, donc g est uniformément continue sur $[0, 1]$. Ainsi f est uniformément continue sur $[0, 1[$.

2) Supposons que f est uniformément continue sur $[0, 1[$.

a) Montrons que l'image par f d'une suite $(a_n)_n$ qui converge vers 1, est une suite convergente. On a,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Donc il existe un entier N , tel que pour tous $m \geq n \geq N$, $|a_n - a_m| < \eta$ donc

$$|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$$

Donc $(f(a_n))_n$ est de Cauchy. Donc elle converge vers une limite l .

b) Montrons que l est unique. Si $(b_n)_n$ une suite d'éléments de $[0, 1[$ qui converge vers 1. Soit $(c_n)_n$ la suite définie par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Alors la suite $(c_n)_n$ converge vers 1, ainsi $(f(c_n))_n$ converge vers une limite l' . Ainsi

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = l' = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

D'où si $b_n \rightarrow 1$ on a $f(b_n) \rightarrow l$. Ainsi f admet une limite quand $x \rightarrow 1$, par suite f prolongeable par continuité au point 1.

CHAPITRE 2

Séries numériques

1. Suites dans \mathbb{C} .

Une suite complexe est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{C} . Toutes les propriétés des suites réelles, autres que celles qui dépendent de l'ordre, restent vrais pour les suites complexes. Dans le reste de ce paragraphe, et sauf mention explicite du contraire, toutes les suites considérées sont complexes.

Définition 2.1. Une suite complexe $(u_n)_n$ est dite convergente vers un élément $l \in \mathbb{C}$ si la suite réelle $(|u_n - l|)_n$ converge vers zéro.

Soit $(u_n)_n$ une suite complexe et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n (resp. b_n) la partie réelle (resp. imaginaire) de u_n . Donc on a pour tout entier n , $u_n = a_n + ib_n$. Avec ces notations on a

Proposition 2.1. $(u_n)_n$ convergente vers une limite $l = a + ib \in \mathbb{C}$ si, et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Démonstration. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - a| \leq |u_n - l| \text{ et } |b_n - b| \leq |u_n - l|.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - l| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - b| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 = 0$, c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - l| = 0$. \square

2. Séries numériques.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n = u_0 + \dots + u_n$ la somme de $n + 1$ premiers termes de cette suite. Alors on a

Définition 2.2. 1) La suite $(S_n)_n$ est appelée série de terme général u_n , cette série sera notée $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$.

2) $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée la somme partielle d'ordre n de la série.

3) La série $\sum_n u_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_n$ est convergente, dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$, est alors appelée somme de la série $\sum_n u_n$, et désignée par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $u_0 + \dots + u_n + \dots$.

4) La série $\sum_n u_n$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 2.1. 1) On peut avoir une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ qui n'est définie qu'à partir d'un certain indice $n_0 \geq 1$. Dans ce cas la série $\sum_n u_n$ est la série de terme général u_n , où $u_n := 0$ pour $0 \leq n \leq n_0 - 1$.

2) Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Par abus de langage, et aussi suivant certains auteurs, on va se permettre d'utiliser la notation $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ pour désigner à la fois la série $\sum_n u_n$ et la somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, si elle existe. Mais pour éviter toute confusion, les expressions : série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ converge (ou diverge) ..., signifient qu'il s'agit d'une série, par contre les expressions : la somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ égale à un scalaire (ou à l'infinie) ..., signifient qu'il s'agit d'une somme.

Exemples 2.1. 1) Soit $r \in \mathbb{R}$, la **série géométrique** de raison r est la série $\sum_n r^n$, on a $\sum_n r^n$ converge si, et seulement si $-1 < r < 1$. En effet, si $r \in]-1, 1[$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \implies \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

Pour $r = 1$, $S_n = n + 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r \geq 1$, $S_n \geq n + 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r = -1$, $\sum_k r^k$ diverge. En effet,

$$S_{2n} = \frac{1 - (-1)^{2n+1}}{1 - (-1)} = 1$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - (-1)^{2n+2}}{1 - (-1)} = 0.$$

Pour $r < -1$, $\sum_k r^k$ diverge. En effet,

$$S_{2n} = \frac{1 - r^{2n+1}}{1 - r} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \infty$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = -\infty.$$

2) La série

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente, car pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Définition 2.3. La somme de deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, notée $\sum_n u_n + \sum_n v_n$, est la série

$$\sum_n u_n + v_n.$$

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, le produit de λ et la série $\sum_n u_n$, notée $\lambda \cdot \sum_n u_n$, est la série

$$\sum_n \lambda u_n.$$

Proposition 2.2. Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries convergentes et si λ et β sont deux scalaires alors la série

$$\lambda \cdot \sum_n u_n + \beta \cdot \sum_n v_n$$

est convergente et on a

$$\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + \beta v_n.$$

Démonstration. Découle du fait que cette propriété est vraie pour les suites formées par les sommes partielles. \square

Proposition 2.3. *Une série $\sum_n u_n$ est convergente si, et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq N, \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Découle du critère de Cauchy pour la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$. \square

Proposition 2.4. *Si une série $\sum_n u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Attention 2.1. La réciproque de la proposition 2.4 n'est pas vraie en général. Voici deux exemples :

1) Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Le terme général de cette série converge vers zéro. Mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2) Un exemple remarquable est donné par la **série harmonique**

$$\sum_n \frac{1}{n}.$$

Le terme général de cette série est $1/n$ qui converge vers zéro. Mais on a

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle est divergente.

3. Séries numériques à termes positifs.

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux séries à termes généraux positifs, c'est à dire les séries $\sum_n u_n$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Proposition 2.5. *Une série $\sum_n u_n$ à termes positifs est convergente si, et seulement si elle est bornée.*

Démonstration. La suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$ est croissante, donc elle converge si, et seulement si elle est bornée. \square

Remarque 2.2. Si $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n u_k$. D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Proposition 2.6. *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors :*

- 1) *si la série $\sum_n v_n$ converge la série $\sum_n u_n$ converge et on a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.*
- 2) *si la série $\sum_n u_n$ diverge la série $\sum_n v_n$ diverge.*

Démonstration. Si $\sum_n v_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$.
D'où $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. \square

Exemples 2.1. *Etudions la nature de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1) \cdot n},$$

or $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ est convergente, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Corollaire 2.1. *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que $u_n = O(v_n)$ lorsque n tend vers ∞ . Si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.*

Démonstration. Il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq Mv_n$. La série $\sum_n Mv_n$ est convergente, donc $\sum_n u_n$ converge. \square

Corollaire 2.2. *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers ∞ . Alors les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. \square

4. Règles de convergence.

4.1. Règle de Riemann.

Proposition 2.7. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Cas $\alpha = 1$, (voir aussi Attention 2.1, 2)) on a

$$\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Cas $\alpha \neq 1$, pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\right).$$

Remarquons que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \sim 1 - (\alpha-1)\frac{1}{n},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &\sim (\alpha-1)\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}n} \\ &\sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. \square

Corollaire 2.3. (Règle de Riemann) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1) S'il existe un $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$, en particulier si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n$ existe, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

2) S'il existe un $M > 0$ et $\alpha \leq 1$ tels que $n^\alpha u_n \geq M$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Démonstration. Exercice. \square

4.2. Règle de Cauchy. Ici on va étudier les séries comparables aux séries géométriques.

Proposition 2.8. (Règle de Cauchy) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1) S'il existe $0 \leq \lambda < 1$ tel que pour n assez grand $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

2) Si pour une infinité d'indices on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Remarque 2.3. Comme cas particulier de la règle de Cauchy, on a si $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, et si de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$, alors :

- si $\lambda < 1$, la série converge,
- si $\lambda > 1$, la série diverge,
- si $\lambda = 1$, on peut rien dire.

4.3. Règle de d'Alembert.

Proposition 2.9. Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries, supposons de plus qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1) Si $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge.

2) Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$. D'où $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$, ainsi $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$. D'où le résultat. \square

Corollaire 2.4. (Règle de d'Alembert) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, supposons de plus que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$, alors :

- 1) Si $\lambda < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge.
- 2) Si $\lambda > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge.

Démonstration. Exercice. \square

5. Comparaison série-intégrale.

Soit $f : [n_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$, une fonction décroissante et positive alors on a :

Théorème 2.1. La série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

De plus :

1) La série

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\int_{n-1}^n f(x)dx - f(n) \right)$$

est une série à termes positifs convergente.

2) Si la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ converge, alors :

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n).$$

Démonstration. 1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\int_{n-1}^n f(x)dx - f(n) \right) &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (f(n-1) - f(n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(n_0) - f(n) \end{aligned}$$

Une telle limite existe car f est décroissante.

2) Exercice. \square

Exemples 2.2. Considérons la **Série de Bertrand** :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\alpha > 1$, la série converge ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = 0$),
- si $\alpha < 1$, la série diverge ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = \infty$),
- si $\alpha = 1$, $x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$ est une fonction définie sur $[2, \infty[$ décroissante et positive de plus

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx = \int_2^\infty \frac{1}{t^\beta} dt \quad (\text{en posant } t = \ln(x))$$

d'où l'intégrale est convergente si, et seulement si $\beta > 1$, ainsi $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.

6. Série à termes réels ou complexes.

6.1. Séries absolument convergentes.

Définition 2.4. Une série à termes réels ou complexes $\sum_n u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_n |u_n|$, est convergente.

Proposition 2.10. *Une série absolument convergente est une série convergente.*

Démonstration. On va appliquer le critère de Cauchy. La série $\sum_n |u_n|$ est convergente donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall q \geq p \geq N, \sum_{n=p}^q |u_n| < \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall q \geq p \geq N, \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| < \varepsilon.$$

D'où la série $\sum_n u_n$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge. \square

Remarque 2.4. Tous les résultats et les règles du paragraphe précédant s'étendent au cas général mais en remplaçant 'convergente' par 'absolument convergente', les termes généraux par leurs modules et 'divergente' par 'ne converge pas absolument'.

Attention 2.2. L'équivalence des termes généraux de deux séries qui **ne gardent pas un signe constant**, n'entraîne pas le fait que les deux séries sont de **même nature**. Considérons les deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$$

les termes généraux de ces deux séries sont équivalents, mais la première série est convergente (voir le sous paragraphe sur les séries alternées) et la deuxième est divergente. En effet, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} \right)$ sont de même natures. De plus

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n \sqrt{n+1} + 1 - (-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} \end{aligned}$$

Donc S est une série de terme général positif $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} \geq \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 2$, d'où elle diverge, ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$ diverge.

6.2. Séries produit.

Définition 2.5. Soient $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ deux séries, la série produit des séries

$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ est la série :

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$$

où

$$w_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq n_0, q \geq n'_0}} u_p v_q$$

Remarque 2.5. 1) Dans la définition précédente si $n_0 = n'_0 = 0$, alors

$$\begin{aligned} w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q &= u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \cdots + u_0 v_n \\ &= \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k. \end{aligned}$$

2) La série produit de deux série est appelée aussi **produit de Cauchy**.

Proposition 2.11. *La série produit $\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$ de deux série absolument convergentes $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n \right)$$

Démonstration. a) Cas où les deux séries $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ sont à termes positifs, on a pour tout entier $m \geq n_0 + n'_0$,

$$\left(\sum_{n=n_0}^m u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^m v_n \right) \leq \sum_{n=n_0+n'_0}^{2m} w_n \leq \left(\sum_{n=n_0}^{2m} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^{2m} v_n \right)$$

donc si les deux séries sont convergentes alors la série $\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$ converge. Il découle des deux inégalités précédentes que

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n \right).$$

b) Cas général. Soit pour tout entier $m \geq n_0 + n'_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0+n'_0}^m w_n - \left(\sum_{n=n_0}^m u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^m v_n \right) \right| &= \left| \sum_{\substack{m < p+q \\ p \leq m, q \leq m}} u_p v_q \right| \\ &\leq \sum_{\substack{m < p+q \\ p \leq m, q \leq m}} |u_p v_q| \end{aligned}$$

Soit $\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w'_n$ la série produit de $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ et $\sum_{n=n'_0}^{\infty} |v_n|$. Alors on a

$$\sum_{\substack{m < p+q \\ p \leq m, q \leq m}} |u_p v_q| = \sum_{n=n_0+n'_0}^m w'_n - \left(\sum_{n=n_0}^m |u_n| \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^m |v_n| \right).$$

Donc d'après a), $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m < p+q \\ p \leq m, q \leq m}} |u_p v_q| = 0$. D'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=n_0+n'_0}^m w_n - \left(\sum_{n=n_0}^m u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^m v_n \right) \right| = 0.$$

Ainsi, la série produit est convergente et on a

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n \right).$$

De plus pour tout entier $n \geq n_0 + n'_0$, on a $|w_n| \leq w'_n$, donc la série produit est absolument convergente. \square

Exemples 2.3. Soit $r \in]-1, 1[$, étudions la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)r^n = \sum_{k=0}^n r^{n-k} r^k$. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n$ n'est autre que la série produit de $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. D'où elle est absolument convergente et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n \right) \\ &= \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} \end{aligned}$$

Attention 2.3. En général

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

par exemple

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)^2 = 2^2 \neq \frac{4}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$

6.3. Séries alternées.

Définition 2.6. Soit $\sum_n u_n$ une série convergente, le reste d'ordre n de cette série est la somme $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Remarque 2.6. En général le reste d'ordre n d'une série est noté R_n , donc on a $S = S_n + R_n$ où S et S_n sont respectivement la somme et la somme partielle d'ordre n de la série.

Définition 2.7. Une série alternée est une série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, où

- $(v_n)_n$ est une suite décroissante,
- $(v_n)_n$ est une suite positive,
- $(v_n)_n$ converge vers zéro.

Remarque 2.7. Il existe d'autres définitions des série alternées la plus générale dit qu'une série de terme général u_n est alternée si $(-1)^n u_n$ garde un signe constant. Dans une autre définition une telle série est alternée si $(-1)^n u_n$ est décroissante positive.

Proposition 2.12. *Toute série alternée $\sum_n (-1)^n v_n$ est convergente. De plus :*

- 1) (Formule de majoration du reste) Pour tout entier n , $|R_n| \leq v_{n+1}$.
- 2) La somme partielle S_n vérifie

$$S_{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n \leq S_{2n}.$$

De plus les deux suites $(S_{2n+1})_n$ et $(S_{2n})_n$ sont adjacentes.

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = S_{2n+1} \text{ et } b_n = S_{2n}.$$

On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0, \\ b_{n+1} - b_n &= -v_{2n+1} + v_{2n+2} \leq 0, \\ b_n - a_n &= v_{2n+1} \longrightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Donc les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite qui n'est autre que la somme S de la série $\sum_n (-1)^n v_n$. Par suite $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

Il reste à montrer 1). On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} |R_{2n}| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |S_{2m} - S_{2n}| = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} - S_{2n} \\ &\leq S_{2n+2} - S_{2n} = -v_{2n+2} + v_{2n+1} \\ &\leq v_{2n+1}. \\ |R_{2n+1}| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |S_{2m+1} - S_{2n+1}| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2n+1} - S_{2m+1} \\ &\leq S_{2n+1} - S_{2n+3} = v_{2n+2} - v_{2n+3} \\ &\leq v_{2n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Exemples 2.4. *Les séries*

$$\sum_n \frac{\cos(n\pi)}{n+1}, \quad \sum_n \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

sont des séries alternées donc elles convergent.

7. Série n° 2.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries ($a \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} &\sum_n \frac{1 + \sin(n^2)}{n^2 + 1 - \sin(2n)}; \quad \sum_n e^{-(n^2+1)^a}; \quad \sum_n \frac{(na)^n}{n!}, \quad 0 \leq a \neq \frac{1}{e}; \\ &\sum_n \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^a}; \quad \sum_n \frac{(n!a^n)^2}{(2n)!}, \quad 0 \leq a \neq 2; \quad \sum_n \arccos\left(\frac{n^a}{1+n^a}\right). \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer la nature de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} a^n$, $a \in \mathbb{R}$, et calculer sa somme dans le cas où elle existe (Ind. donner l'expression de la série produit $(\sum_{n=0}^{\infty} a^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a^n)^2$).

Exercice 3. (Formule de Stirling). On considère la suite :

$$x_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} e^{-n} \text{ et on pose } u_n = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

1) Montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) En déduire que la série $\sum_n u_n$ converge et que la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite $x > 0$.

3) En utilisant la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4) En remarquant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{1}{x}$, déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5) En déduire que $(n!)_n$ et $((ne^{-1})^n \sqrt{2\pi n})_n$ sont équivalents.

6) En déduire la nature de la série $\sum_n \frac{(ne^{-1})^n}{n!}$.

Exercice 4. 1) En utilisant le théorème de comparaison série-intégrale, vérifier que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

converge vers une constante C (constante d'Euler).

2) Soit la série harmonique alternée :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Démontrer que la somme partielle S_{2n+1} de cette série vaut : $\sigma_{2n+1} - \sigma_n$ où $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$.

3) Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \ln 2$ et que la somme de la série harmonique alternée existe et elle vaut $\ln 2$.

4) En déduire une valeur approchée de $\ln 2$ à l'ordre $\frac{1}{10}$.

Exercices facultatifs

Exercice 5. (Règle de Duhamel) 1) Soit $(u_n)_n$ une suite de termes positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer que pour $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

2) Soit $(u_n)_n$ une suite de termes positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \alpha > 0, \beta > 1$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$, étudier la série $\sum_n \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ et déduire que la suite $(v_n)_n$ possède une limite $l > 0$. En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.

3) Etudier la nature des séries de termes généraux :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}; \quad (n!)^{1/2} \prod_{k=1}^n \sin(k^{-1/2}); \quad \frac{(ne^{-1})^n}{n!};$$

$$\frac{(n!p^n)^p}{(pn)!}; \quad a^{(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+n})}; \quad (p \in \mathbb{N}^*, a > 0)$$

Exercice 6. Dans cet exercice nous admettons le résultat suivant dit **règle de Abel** : Si $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs décroissante et converge vers zéro et si $(v_n)_n$ est une suite telle que pour tout $\sum_{k=0}^n v_n$ est bornée alors la série $\sum_n u_n v_n$ est convergente.

Montrer que pour $\theta \in]0, 2\pi[$, la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente. En déduire la nature des séries $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n}$ et $\sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Exercice 7. 1) Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives équivalentes. Montrer que :

1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, alors les sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ et $\sum_{k=0}^n v_k$ sont équivalentes.

2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, alors les restes $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ sont équivalentes.

3) Donner la nature de la série de terme général $(\sum_{k=1}^n k \ln(1 + \frac{1}{k}))^a$, $a \in \mathbb{R}$.

Série 2, Solution.

Exercice 1.

- $0 \leq \frac{1+\sin(n^2)}{n^2+1-\sin(2n)} \leq \frac{2}{n^2}$, la série converge;
- si $a \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n^2+1)^a} \neq 0$, la série diverge, (terme général $\neq 0$),
- si $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-(n^2+1)^a} = 0$, la série converge, (Riemann);
- $u_n = \frac{(n!a^n)^2}{(2n)!}$, $a \neq 2$,
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)a)^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{a^2}{4}$, la série converge $\iff a < 2$, (d'Alembert);
- $u_n = \frac{(na)^n}{n!}$, $a \neq \frac{1}{e}$,
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow ae$, la série converge $\iff a < \frac{1}{e}$, (d'Alembert);
- $\frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$ comarable à $I = \int_3^\infty \frac{1}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^a} dx$, posons $t = \ln(x)$,
- on a $I = \int_{\ln(3)}^\infty \frac{1}{t^a} dt$, la série converge $\iff a > 1$, (série-intégrale);
- $\arccos(\frac{n^a}{1+n^a})$, l'équivalence au voisinage de 1, $\arccos(y) \simeq \sqrt{2(1-y)}$,
- entraîne $\arccos(\frac{n^a}{1+n^a}) \simeq \sqrt{2 \frac{1}{1+n^a}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{a}{2}}}$,
- la série converge $\iff a > 2$;

Exercice 2. Si $|a| \geq 1$, la série diverge, car le terme général ne tend pas vers zéro.

si $a \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n=0}^\infty a^n$ est absolument convergente, donc la série produit $(\sum_{n=0}^\infty a^n)^2$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1)a^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} a^k \right) = \left(\sum_{n=0}^\infty a^n \right)^2 = \left(\frac{1}{1-a} \right)^2,$$

donc la la série produit $(\sum_{n=0}^\infty a^n)(\sum_{n=0}^\infty (n+1)a^n)$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+2)(n+1)}{2} a^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} (k+1)a^k \right) = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{1-a} \right)^2 = \left(\frac{1}{1-a} \right)^3.$$

Exercice 3. 1) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} e^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 + 1 - n \frac{1}{2n^2} + nO\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

2) De 1) la série $\sum_n u_n$ converge, donc $\sum_n (\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n))$ converge d'où $(\ln(x_n))_n$ converge vers une limite s , ainsi $(x_n)_n$ converge vers une limite $x = e^s > 0$.

3)

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}}\right)^2 &= \frac{(2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n \cdot (2n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n \cdot (2n-1)} \frac{1}{2n+1} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)}\right) \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}\right)^2 \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\left(\frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. D'autre part

$$\frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!} e^{-2n} \frac{(n!)^2}{n^{2n+\frac{1}{2}}} e^{2n} = \frac{\sqrt{2}(2)^{2n} (n!)^2}{(2n)! n^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2^n \cdot n!)^2 \sqrt{2}}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

D'où d'après 3) $\frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2})^2$, donc $x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5) D'après 4) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ne^{-1})^n \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$, ainsi $n! \simeq (ne^{-1})^n \sqrt{2\pi n}$.

6) On a aussi $\frac{(ne^{-1})^n}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, donc les séries $\sum_n \frac{(ne^{-1})^n}{n!}$ et $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ sont de même nature, donc $\sum_n \frac{(ne^{-1})^n}{n!}$ diverge.

Exercice 4. 1) L'application $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante positive donc, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx - \frac{1}{k} \right)$$

est une série convergente, c'est à dire que

$$\sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx - \frac{1}{k} \right) = \int_1^n \frac{1}{x} dx - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

est convergente, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \left(\int_1^n \frac{1}{x} dx - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right)$$

converge vers une constante C .

2) Soient $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$. On a

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - 2 \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sigma_{2n+1} - \sigma_n. \end{aligned}$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \sigma_{2n} - \ln(2n) + \ln(2) + \ln(n) - \sigma_n \rightarrow C + \ln(2) - C = \ln(2)$. La série harmonique alternée est une série alternée (de terme général tend vers zéro), donc elle converge vers une limite S , par suite S_{2n+1} converge aussi vers S , donc $S = \ln(2)$.

4) D'après la formule de majoration du reste pour les séries alternées, on a

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=0}^9 \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{10},$$

d'où $\sum_{k=0}^9 \frac{(-1)^k}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à l'ordre $\frac{1}{10}$.

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels normés

1. Définitions générales.

1.1. Définition et exemples.

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel une norme sur E est une application :
 $E \rightarrow \mathbb{R}^+, x \rightarrow \|x\|$ telle que

- 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **inégalité triangulaire**,
- 3) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

L'espace $(E, \| \cdot \|)$ est appelé **espace vectoriel normé**.

Exemples 3.1. I) Sur \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, on peut définir des normes par (pour $x = (x_1, \dots, x_n)$) :

- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$,
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$,
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Montrons, par exemple, que

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} |x_1 + y_1|^2 + \dots + |x_n + y_n|^2 &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \\ &\quad + |y_1|^2 + \dots + |y_n|^2 \\ &\quad + 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) - (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 \cdot y_j^2 + x_j^2 \cdot y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) &\leq 2|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \end{aligned}$$

par suite $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. \square

II) Sur l'espace $C([a, b])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ où $a < b$, on peut définir les trois normes suivantes :

- $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$
- $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

La seule propriété qui n'est pas évidente est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$. Cette propriété découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz $|\int_a^b f(x)g(x) dx| \leq (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

III) Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on peut définir les trois normes suivantes (pour $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$) :

- $\|P\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$
- $\|P\|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$
- $\|P\|_2 = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$

Exercices 3.1. Soient a et b deux points différents d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, soit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_t = a + \frac{t}{\|b - a\|} (b - a)$$

- 1) Donner x_t , pour $t = 0$ et pour $t = \|b - a\|$.
- 2) Vérifier que $\|x_t - x_s\| = |t - s|$.
- 3) Supposons $r \leq s \leq t$, comparer $\|x_t - x_r\|$ et $\|x_t - x_s\| + \|x_s - x_r\|$.
- 4) Comparer suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$,

$$\|b - a\|, \|x_t - a\|, \|x_t - b\|.$$

1.2. Suites et limite. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite d'éléments de E est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow E$, cette application est notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$.

Définition 3.2. Une suite u d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est convergente vers un élément $l \in E$, si la suite réelle $(\|u_n - l\|)_n$ converge vers zéro.

Proposition 3.1. (Unicité de la limite) La limite d'une suite dans un espace normé est unique.

Démonstration. Si l et l' sont deux limites d'une suite $(u_n)_n$ dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - l\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - l'\|$, donc

$$\|l - l'\| \leq \|l - u_n\| + \|u_n - l'\| \rightarrow 0,$$

ainsi $\|l - l'\| = 0$ et $l = l'$. \square

Définition 3.3. Une suite $u = (u_n)_n$ d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, est dite suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N, \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Exactement comme le cas réel on a :

Proposition 3.2. *Dans un espace normé toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Exercice. \square

Attention 3.1. Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente. Soit par exemple $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n\|_\infty = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\}.$$

Alors, $(u_n)_n$ où $u_n = X + \frac{1}{2}X + \cdots + \frac{1}{n}X^n$ est une suite de Cauchy car pour $n, p \in \mathbb{N}$, $\|u_{n+p} - u_n\| \leq \frac{1}{n+1}$, mais pour tout polynôme

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m,$$

et pour tout $n \geq m + 1$, on a

$$\|u_n - P\|_1 \geq \frac{1}{m+1} > 0$$

donc $(u_n)_n$ ne converge pas vers P .

Définition 3.4. Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

1.3. Notions de topologie.

Définition 3.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, alors :

- si $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$B_{(a,r)}^f = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$$

est dite la boule fermée de centre a est de rayon r ,

- si $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble

$$B_{(a,r)} = \{x \in E : \|x - a\| < r\}$$

est dite la boule ouverte de centre a est de rayon r ,

- si $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble

$$S_{(a,r)} = \{x \in E : \|x - a\| = r\}$$

est dite la sphère de centre a est de rayon r .

Remarque 3.1. La boule $B_{(0,1)}^f$ (resp. $B_{(0,1)}$) est appelée la **boule unité fermée** (resp. **boule unité ouverte**) est elle sera notée B (resp. B^f).

Définition 3.6. Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, un ensemble $B \subseteq E$ est dit **borné** si $\{\|b\| : b \in B\}$ est borné.

Remarque 3.2. 1) Un sous ensemble B d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est borné si, et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B \subseteq B_{(0,r)}$.

- 2) Une réunion finie de bornés est un borné.
- 3) Tout sous ensemble d'un ensemble borné est borné.
- 4) Une suite $(u_n)_n$ est dite **bornée** si l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Définition 3.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

- Un sous ensemble O de E est appelé **ouvert** si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_{(x,r)} \subseteq O$.

- Un sous ensemble F de E est appelé **fermé** si $E \setminus F$ est un ouvert.

Remarque 3.3. 1) L'ensemble vide \emptyset et E sont des ensembles ouverts et fermés.

- 2) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- 3) Une intersection finie de ouverts est un ouvert.
- 4) Une réunion finie de fermés est un fermé.

5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

La remarque précédente permet de donner la définition :

Définition 3.8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

1) L'intérieur d'un ensemble A , noté $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

2) L'adhérence, ou la fermeture, d'un ensemble A , noté \overline{A} est le plus petit fermé contenant E .

Exercices 3.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Si A et B deux parties de E , Montrer que :

$$1) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$2) A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Proposition 3.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $F \subseteq E$. Alors on a l'équivalence :

1) F est fermé dans E ,

2) toute suite d'éléments de F qui converge dans E , sa limite est dans F .

Démonstration. Analogue à celle donnée pour \mathbb{R} , le lecteur est invité à faire la preuve en exercice.

Exercices 3.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $A \subseteq E$ et $x \in E$. Montrer l'équivalence :

$$1) x \in \overline{A},$$

2) il existe $(a_n)_n$ dans A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

1.4. Distances et topologie d'une partie d'un espace normé.

Définition 3.9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, soit

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

l'application définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Alors d vérifie les propriétés suivantes :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie),
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangulaire).

On dit alors que d est une distance, plus précisément d est dite distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

• Pour tout sous ensemble de A de E , d est aussi définie sur $A \times A$. On dit alors que (A, d) est un espace métrique.

Définition 3.10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés et A une partie de E . Si

$$f : A \longrightarrow F$$

est une application :

1) Si $a \in \bar{A}$, on dit que f converge vers $b \in F$ quand x tend vers a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in A, \|x - a\| < \eta \implies \|f(x) - b\|' < \varepsilon$$

2) l'application f est continue en un point a de A si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3) f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

Proposition 3.4. Si $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ sont deux espaces normés, $A \subseteq E$, $f : A \longrightarrow F$ une application et $a \in \bar{A}$. Alors on a l'équivalence :

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in F$,
- 2) pour toute suite $(x_n)_n$ dans A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

Démonstration. Exercice. \square

Exemples 3.2. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et A une partie de E .

1) Une application $f : A \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** si $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Alors toute application lipschitzienne est continue.

2) Soit d la distance associée à $\|\cdot\|_E$, pour tout sous ensemble non vide A de E , on peut définir l'application

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d(x, A)$$

où $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$, dite distance de x à A . Alors f est lipschitzienne.

3) Sur un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ les applications

$$t_a : E \rightarrow E; x \mapsto x + a, \text{ et } h_\lambda : E \rightarrow E; x \mapsto \lambda x$$

où $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues.

4) Soient A (resp. B) une partie non vide de E (resp. F). Une application $f : A \longrightarrow B$ est dite une **isométrie** si $d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$ pour tout $(x, y) \in A \times B$. Alors toute isométrie est continue.

Définition 3.11. Soit A une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

1) Un sous ensemble O de A est dit ouvert de A , si $O = U \cap A$ où U est un ouvert de E .

2) Un sous ensemble F de A est dit fermé dans A , si $F = G \cap A$ où G est un fermé dans E .

Proposition 3.5. Soit A une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. Si de plus O une partie de A , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) O est un ouvert de A ,
- 2) pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que

$$B_A(a, r) = \{x \in A : d(a, x) < r\} \subseteq O$$

Démonstration. Exercice.

Exercices 3.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que :

- 1) Toute boule ouverte est un ouvert.
- 2) Toute boule fermée est un fermé.
- 3) Pour tout $r > 0$ et $a \in E$, $B_{(a,r)}^f = \overline{B_{(a,r)}}$.

Solution. 1) Soit $b \in B_{(a,r)}$, posons $s = r - \|b - a\|$. Vérifions que $B_{(b,s)} \subseteq B_{(a,r)}$. En effet, pour tout $c \in B_{(b,s)}$, on a $\|c - b\| < s$, donc

$$\|c - a\| \leq \|c - b\| + \|b - a\| < s + \|b - a\| = r.$$

D'où $c \in B_{(a,r)}$. Ainsi $B_{(a,r)}$ est un ouvert.

2) Soit $b \notin B_{(a,r)}^f$, on a $\|b - a\| > r$. Posons $s = \|b - a\| - r$, alors $B_{(b,s)} \cap B_{(a,r)}^f = \emptyset$, c'est à dire $B_{(b,s)} \subseteq E \setminus B_{(a,r)}^f$, d'où $E \setminus B_{(a,r)}^f$ est un ouvert.

3) Soit $b \in B_{(a,r)}^f$ si $b \notin B_{(a,r)}$ donc $\|b - a\| = r$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})b$. On a

$$\begin{aligned} \|b_n - a\| &= \|\frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})b - (\frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})a)\| \\ &= \|(1 - \frac{1}{n})(b - a)\| = (1 - \frac{1}{n})r < r. \end{aligned}$$

Donc $b_n \in B_{(a,r)}$. De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. D'où $b \in \overline{B_{(a,r)}}$. Ainsi $B_{(a,r)}^f \subseteq \overline{B_{(a,r)}}$, de plus $B_{(a,r)}^f$ est un fermé qui contient $B_{(a,r)}$, d'où l'égalité.

Proposition 3.6. *Soit A une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace normé. Si de plus $f : A \longrightarrow F$ une application. Alors on a l'équivalence :*

- 1) f est continue sur A ,
- 2) l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A .

Démonstration. 1) \implies 2). Soit O un ouvert de F et $U = f^{-1}(O)$, montrons que U est un ouvert de A . Soit $a \in U$ on a il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte, de F , $B_{(f(a),\varepsilon)}$ est contenue dans l'ouvert O . La continuité de f en a entraîne que pour un certain $\eta > 0$ et pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$, on a $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$, c'est à dire que $f(A \cap B_{(a,\eta)}) \subseteq B_{(f(a),\varepsilon)} \subseteq O$. D'où $A \cap B_{(a,\eta)} \subseteq U$, ainsi U est un ouvert.

2) \implies 1). Soit $a \in A$, pour tout $\varepsilon > 0$, dans F la boule ouverte $B_{(f(a),\varepsilon)}$ est un ouvert, donc $f^{-1}(B_{(f(a),\varepsilon)})$ est un ouvert de A contenant a , donc il existe $\eta > 0$ tel que $A \cap B_{(a,\eta)} \subseteq f^{-1}(B_{(f(a),\varepsilon)})$. D'où pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$ on a $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$, ainsi f est continue sur A par suite f est continue en a pour tout $a \in A$, donc f est continue sur A . \square

Remarque 3.4. Soit A une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace normé. Si de plus $f : A \longrightarrow F$ une application. Alors on a l'équivalence :

- 1) f est continue sur A ,
- 2) l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de A .

Proposition 3.7. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et*

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire, alors on a l'équivalence :

- 1) f est continue,
- 2) f est continue en 0,
- 3) il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration. Les implications 3) \implies 1) \implies 2) sont évidentes. Montrons que 2) \implies 3). Sinon donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in E$, tel que $\|f(x_n)\|_F > n\|x_n\|_E$. Posons

$y_n = \frac{1}{n\|x_n\|_E}x_n$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_E = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Mais

$$\|f(y_n)\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E} \|f(x_n)\|_F > 1.$$

Ainsi $(f(y_n))_n$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde.

Exercices 3.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soit $\|\cdot\|'$ une autre norme sur E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $\|\cdot\|'$ est continue sur E ,
- 2) $\|\cdot\|'$ est continue en zéro,
- 3) il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout x dans E , $\|x\|' \leq M\|x\|$.

Définition 3.12. Sur un espace vectoriel E deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont dites équivalentes si il existe deux réels M et N strictement positifs tels que pour tout $x \in E$,

$$N\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Exemples 3.3. Sur \mathbb{R}^n les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes car

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$$

Remarque 3.5. Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel définissent les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes bornés, les mêmes suites de Cauchy et les mêmes suites convergentes.

2. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Proposition 3.8. *Tout espace vectoriel de dimension finie possède des normes.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E , alors si $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

et $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ sont toutes des normes sur E . \square

Remarque 3.6. Dans le reste de ce paragraphe si E est un espace vectoriel de dimension finie. On peut se permettre de définir les normes

$$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$$

elles seront alors rapporter, sans le dire par fois, à une base quelconque de l'espace E . Signalons que ces trois normes sont équivalentes.

2.1. Parties compacts.

Définition 3.13. Soit E un espace vectoriel et Soit $u = (u_n)_n$ une suite dans E . Une sous suite extraite de u est une suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_n$ où $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Théorème 3.1. (de Bolzano-Weierstrass) Soit E un espace normé de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|_\infty$, où une norme équivalente, alors de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite convergente.

Démonstration. On peut supposer que $E = \mathbb{R}^p$ et soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur E . On démontre le théorème par récurrence sur p . Si $p = 1$, le théorème est déjà démontré. Supposons le résultat vrai pour p , Si $(u_n)_n$ est une suite bornée de \mathbb{R}^{p+1} , donc $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^{p+1})$, alors la suite $((u_n^1, \dots, u_n^p))_n$ est bornée dans \mathbb{R}^p donc, par hypothèse de récurrence, elle possède une sous suite extraite $((u_{\sigma(n)}^1, \dots, u_{\sigma(n)}^p))_n$ qui converge. La suite $(u_{\sigma(n)}^{p+1})_n$ est bornée donc elle possède une sous suite extraite $((u_{\sigma(\varphi(n))}^1, \dots, u_{\sigma(\varphi(n))}^p))_n$ qui converge. Donc $((u_{\sigma\circ\varphi(n)}^1, \dots, u_{\sigma\circ\varphi(n)}^{p+1}))_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge. \square

Définition 3.14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Un sous ensemble K de E est dit compact si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous suite convergente dans K .

Proposition 3.9. Soit E un espace normé de dimension finie muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, où une norme équivalente, Alors les parties compacts de E sont exactement les parties fermées bornées.

Démonstration. Exercice.

Exemples 3.4. Soit E un espace normé de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|_\infty$, où une norme équivalente.

- 1) Les boules fermées est les sphères sont des compacts dans E .
- 2) Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers un élément x dans E , alors l'ensemble

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est un compact.

En effet, Il est clair que K est borné. Vérifions que K est fermé. Soient $a \notin K$ et $r = \frac{\|a-x\|}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N$, $x_n \in B_{(x,r)}$. Soit $s = \min\{r, \|a-x_0\|, \|a-x_1\|, \dots, \|a-x_{N-1}\|\}$. Alors $B_{(a,s)} \cap K = \emptyset$, d'où $E \setminus K$ est un ouvert, c'est à dire K est fermé. Ainsi K est un compact.

Proposition 3.10. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Démonstration. Exercice.

Corollaire 3.1. *Soit K un compact d'un espace normé de dimension finie. Toute application $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue est bornée et elle atteint ses bornes.*

Démonstration. Exercice.

Définition 3.15. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés de dimension finie. Si de plus A est une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \quad & \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \\ & \implies \|f(x) - f(y)\|' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Remarque 3.7. Soit $f : A \rightarrow F$ une application, si f est uniformément continue sur A , alors f est continue sur A .

Théorème 3.2. (de Heine) *Toute application continue sur un compact est uniformément continue.*

Démonstration. Exercice.

Théorème 3.3. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E , montrons que $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. D'une part,

$$\begin{aligned} \|x\| & \leq \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| \\ & \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \cdot (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|) \\ & = \|x\|_\infty (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|) \end{aligned}$$

Nous avons démontré que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et puisque la sphère unité

$$S_{\|\cdot\|_\infty} = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$$

de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un compact dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Donc $x \mapsto \|x\|$ atteint ses bornes sur $S_{\|\cdot\|_\infty}$.

D'où il existe $s \in S_{\|\cdot\|_\infty}$ tel que

$$\inf_{x \in S} \|x\| = \|s\| = N > 0.$$

D'où pour tout $x \in E$ non nul, $\|\frac{1}{\|x\|_\infty}x\| \geq N$, c'est à dire $\|x\| \geq N\|x\|_\infty$. Par suite pour tout $x \in E$, $N\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|)\|x\|_\infty$. \square

Théorème 3.4. *Toute espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie. Toute les normes sur E sont équivalentes donc on peut utiliser la norme $\|\cdot\|_1$ par rapport à une base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de E . Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E . Pour tout n on a $u_n = u_n^1 e_1 + \dots + u_n^m e_m$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $|u_{n+p}^i - u_n^i| \leq \|u_{n+p} - u_n\|_1$. Donc $(u_n^i)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} , donc elle converge vers une limite notée $l^i \in \mathbb{R}$. Soit $l = l^1 e_1 + \dots + l^m e_m$, on a $\|u_n - l\|_1 = |u_n^1 - l^1| + \dots + |u_n^m - l^m|$, ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - l\|_1 = 0$. D'où $(u_n)_n$ converge vers l dans E . \square

Proposition 3.11. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie, $(F, \|\cdot\|')$ un espace normé et $f : E \rightarrow F$, une application linéaire, alors f est continue.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie de E associée à cette base. Pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\|' &\leq |x_1| \|f(e_1)\|' + \dots + |x_p| \|f(e_p)\|' \\ &\leq \|x\|_\infty (\|f(e_1)\|' + \dots + \|f(e_p)\|'). \end{aligned}$$

Sur l'espace E , la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq M\|x\|$. D'où pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x)\|' \leq M(\|f(e_1)\|' + \dots + \|f(e_p)\|')\|x\|. \quad \square$$

2.2. Parties connexes par arcs.

Définition 3.16. Soit E un espace normé de dimension finie. Une partie non vide de A de E est dite

- 1) convexe si pour tout $(a, b) \in A^2$, le segment $[a, b] := \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans A ;
- 2) étoilée par rapport à un point a de A , si pour tout $b \in A$, $[a, b] \subseteq A$;
- 3) connexe par arcs si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une application continue $f : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Remarque 3.8. 1) Il est évident que convexe \implies étoilé \implies connexe par arcs.

Vérifions par exemple que étoilé \implies connexe par arcs. Soit A un ensemble étoilé par rapport à un point a , soit $(b, c) \in A^2$ on a $[b, a] \cup [a, c] \subseteq A$. Le segment $[b, a]$ est l'image de $[0, 1]$ par l'application continue $f(t) = (1-t)b + ta$ (resp. $g(t) = (1-t)a + tc$). Soit

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

L'application h est continue sur $[0, 1]$, $h(0) = b$, $h(1) = c$ et $h([0, 1]) = [b, a] \cup [a, c] \subseteq A$.

- 2) Dans \mathbb{R}^2 un cercle, non réduit à un point, est un connexe par arcs qui n'est pas étoilé.
- 3) Dans \mathbb{R}^2 , $[(0, 0), (1, 0)] \cup [(0, 0), (0, 1)]$ est étoilée par rapport à $(0, 0)$, mais elle n'est pas convexe.

Proposition 3.12. *Les connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles*

Démonstration. D'abord tout intervalle est convexe donc il est connexes par arcs. Inversement, si I est un connexes par arcs dans \mathbb{R} . Pour tout $(a, b) \in I^2$, $a \leq b$, il existe une application continue $f : [0, 1] \rightarrow I$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires $[a, b] \subseteq f([0, 1]) \subseteq I$. D'où I est un intervalle.

Proposition 3.13. *L'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs.*

Démonstration. Découle du fait que le composé de deux fonctions continues est une fonction continue. \square

Corollaire 3.2. *L'image d'un connexe par arcs par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.*

Démonstration. Découle des deux propositions précédentes. \square

2.3. Quelques Exemples d'espaces vectoriels normés. I. Le corps \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2, de plus l'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}; (a, b) \mapsto a + ib$ permet d'identifier \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . Ainsi la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{C} n'est autre que le module $|\cdot|$.

II. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés de dimension finie. Soit $\mathbf{L}(E, F)$ l'espace des homomorphismes de E dans F . Tout $f \in L(E, F)$, est continue. Donc $\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|'$ existe et fini, alors $f \mapsto \|f\| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|'$ est une norme sur $L(E, F)$. On dira que $f \mapsto \|f\|$ est **la norme** de $L(E, F)$ (**subordonnée** aux normes de E et F).

III. Soit $\mathbf{L}(E)$ l'espace des endomorphismes sur E , on a la norme $\|\cdot\|$ de $L(E)$, subordonnée à la norme de E , vérifie aussi $\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

IV. L'espace $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre n s'identifie à $L(\mathbb{R}^n)$, ainsi chaque norme sur \mathbb{R}^n donne naissance à une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

V. Si $F = \mathbb{R}$ alors $L(E, F)$ n'est autre que l'**espace dual** de E , noté \mathbf{E}' , c'est l'espace des formes linéaires sur E .

VI. Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ dite norme **Euclidienne**. On a $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ est un **produit scalaire** sur \mathbb{R}^n et

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application :

$$f_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$$

est un élément de E' et on a $E \longrightarrow E'; x \mapsto f_x$ est un isomorphisme isométrique ($\|x\|_2 = \|f_x\|$). Ainsi E **s'identifie à E'** .

VII. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés.

1) L'espace $E \times F$ peut être muni des normes équivalentes suivantes :

- $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|'$
- $(x, y) \mapsto \max\{\|x\|, \|y\|'\}$
- $(x, y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2}$.

L'espace $E \times F$ est appelé **espace normé produit** de E et F .

2) Soit $(G, \|\cdot\|''$) espace normé. Une application $B : E \times F \longrightarrow G$, est dite **bilinéaire** si pour tout $x \in E$ (resp. $y \in F$) l'application : $E \longrightarrow G$; $y \mapsto B(x, y)$ (resp. $F \longrightarrow G$; $x \mapsto B(x, y)$) est linéaire.

3) L'application B est continue si et seulement si, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\|B(x, y)\|'' \leq M\|x\| \cdot \|y\|'$.

En effet (nous vérifions seulement une implication). Pour $(x, y) \in E \times F$ et $(x_0, y_0) \in E \times F$, on a

$$\begin{aligned} \|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|'' &= \|B(x, y) - B(x, y_0) \\ &\quad + B(x, y_0) - B(x_0, y_0)\|'' \\ &\leq \|B(x, y - y_0)\|'' \\ &\quad + \|B(x - x_0, y_0)\|'' \\ &\leq \|x\|_\infty \|y - y_0\|'_\infty M \\ &\quad + \|x - x_0\|_\infty \|y_0\|'_\infty M \end{aligned}$$

4) De plus si E et F sont de dimension finie alors B est continue.

En effet, soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ (resp. $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_m\}$) est une base de E (resp. F). Pour tous

$$x = x_1 + \dots + x_n e_n \in E \text{ et } y = y_1 + \dots + y_m e_m \in F$$

soit $\|\cdot\|_\infty$ (resp. $\|\cdot\|'_\infty$) la norme infinie de E (resp. F) par rapport à la base \mathcal{B} (rep. \mathcal{B}').

$$\begin{aligned} \|B(x, y)\|'' &= \left\| \sum_{i,j} x_i y_j B(e_i, f_j) \right\|'' \\ &\leq \|x\|_\infty \|y\|'_\infty \left(\sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|'' \right) \\ &\leq M \|x\|_\infty \|y\|'_\infty \end{aligned}$$

où $M = \sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|''$.

5) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors les deux applications suivantes, qui sont respectivement linéaire et bilinéaire, sont continues :

- $S : E \times E \longrightarrow E$; $(x, y) \mapsto x + y$

$$\bullet \Pi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E; (\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot y.$$

Donc si on a $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans E , et $\lambda_n \rightarrow \lambda$ dans \mathbb{R} , alors $\lambda_n \cdot x_n + y_n \rightarrow \lambda \cdot x + y$.

VIII. Si E_1, E_2, \dots, E_p , des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1) On peut définir par récurrence l'espace normé produit

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p.$$

2) De même on a toute application p -linéaire

$$f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F,$$

où F est un espace normé, vérifie pour un certain $M > 0$,

$$\|f(x_1, x_2, \dots, x_p)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} \cdots \|x_p\|_{E_p}$$

pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$. Donc f est continue.

3) Comme conséquence on a le **déterminant** $\det : M_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

4) Le **groupe linéaire** $GL_p(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert dans $M_p(\mathbb{R})$.

3. Série n° 3.

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soient A et B deux sous ensembles de E .
Montrer que

- 1) $E \setminus \overline{A} = \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.
- 2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soient $(r, s) \in]0, \infty[^2$ et $(a, b) \in E^2$. Montrer que (ind. dans cette exercice on peut s'inspirer des positions relatives de deux disques dans le plan).

- 1) $B_{(a,r)}$ est un ouvert et $B_{(a,r)}^f$ est un fermé.
- 2) $\overline{B_{(a,r)}} = B_{(a,r)}^f$ et $\overbrace{B_{(a,r)}^f}^{\circ} = B_{(a,r)}$.
- 3) $B_{(a,r)} \cap B_{(b,s)} \neq \emptyset \iff \|a - b\| < r + s$.

$$4) B_{(a,r)} = B_{(b,s)} \iff (a,r) = (b,s).$$

Exercice 3. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2, l'espace \mathbb{R}^2 est muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, vérifier que $\|M\| = \sup\{\|Mx\|_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ est une norme sur $M_2(\mathbb{R})$ et que $\|M\| = \max\{|a_{1,1}| + |a_{1,2}|, |a_{2,1}| + |a_{2,2}|\}$.

2. Vérifier, de deux manières, que si M et N dans $M_2(\mathbb{R})$, $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. On rappelle que pour $x \in E$ et $A \subseteq E$, on a $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

1) Montrer que : $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

2) Montrer que l'application $f_A : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d(x, A)$ est continue (ind. on montrera qu'elle est lipschitzienne).

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé dimension finie et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$.

1) Montrer que si A est une partie fermée non vide de E et $x \in E$, alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

2) En déduire que dans $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ si $x \in \mathbb{R}^3$, et A est une droite ou un plan dans \mathbb{R}^3 , alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$.

Exercice 6. Soient dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, xy = 1\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$.

1) Vérifier que A et B sont deux fermés disjoints.

2) Vérifier que $d(A, B) = 0$.

Exercice 7. Soit dans C la sphère unité dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1) Montrer que l'image de f est un intervalle fermé.

2) Montrer que f n'est pas injective (ind. considérer l'ensemble $C \setminus \{a\}$ où $f(a)$ est un point situé à l'intérieur de $f(C)$, puis dire si $f(C \setminus \{a\})$ est connexe par arcs).

En déduire que f^{-1} est continue.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie, $(F, \|\cdot\|')$ un espace normé et $L : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1) Soit $f : B(0, r) \rightarrow F$, $r > 0$, une application telle que $\|f(x) - L(x)\|' = o(\|x\|)$, montrer que f est continue en zéro.

2) Supposons que f est la restriction d'une application linéaire G , montrer que $L = G$.

Exercices facultatifs

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. On rappelle que pour $x \in E$ et $A \subseteq E$, on a $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

1) Montrer que : $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$.

2) Montrer que l'application $f_A : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d(x, A)$ est continue.

3) Soit F_1 et F_2 deux sous ensembles non vides, fermés et disjoints.

i. Définissons sur E la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

Montrer que f est une application continue, $f(E) \subseteq [0, 1]$, $f(F_1) = \{0\}$ et $f(F_2) = \{1\}$.

ii. Déduire qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subseteq O_1$ et $F_2 \subseteq O_2$.

4) Si A et B sont deux parties de E , on définit $d(A, B) = \inf\{d(x, y) / (x, y) \in A \times B\}$.

i. Vérifier que $d(A, B) = \inf\{d(x, B) / x \in A\} = \inf\{d(y, A) / y \in B\}$.

ii. Supposons que $A \cap B = \emptyset$, A est compact et B est fermé. Montrer que $d(A, B) > 0$.

5) Soient dans \mathbb{R}^2 , $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

i. Vérifier que A et B sont deux fermés disjoints.

ii. Vérifier que $d(A, B) = 0$.

Exercice 2. Soit dans C la sphère unité dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1) Montrer que l'image de f est un intervalle fermé.

2) Montrer que f ne peut pas être bijective (ind. utiliser les propriétés des ensembles connexes par arcs).

Exercice 5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Un sous ensemble non vide A de E est dit connexe si pour tous ouverts disjoints U et V de E , si $A \subseteq U \cup V$ alors $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$.

1) (Tout intervalle de \mathbb{R} est connexe) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soient U et V deux ouverts disjoints tels que $I \subseteq U \cup V$.

i. Soit $(a, b) \in I^2$, tel que $a < b$. Supposons que $a \in U$ et posons

$$E = \{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq U\}.$$

Montrer $c = \sup E$ existe, a-t-on $c \in V$. Conclure.

ii. Que peut-on dire si $a \in V$.

iii. En déduire que $I \subseteq U$ ou $I \subseteq V$.

2) En déduire que tout connexe par arcs dans un espace vectoriel normé est un connexe (ind. soit A un connexe par arcs dans E , s'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$, considérer une application continue $f : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $f(0) \in A \cap U$ et $f(1) \in A \cap V$).

Exercice 3. Soit $M_p(\mathbb{R})$ munie de sa norme $\|\cdot\|$. Soit A et B deux éléments de $M_p(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = B$.

1) Calculer en fonction des puissances de B , $AB^n - B^nA$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2) En déduire que B est nilpotente.

CHAPITRE 4

Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions.

Soit A un ensemble si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (où } \mathbb{C} \text{)}$$

est une fonction, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de fonctions.

1.1. Différents types de convergence pour les suites de fonctions.

Définition 4.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A .

1) On dira que $(f_n)_n$ **converge simplement**, sur A , vers f si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

2) On dira que $(f_n)_n$ **converge uniformément** sur A vers f , si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \\ \forall x \in A, \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Remarque 4.1. 1) Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , sur A , alors elle converge simplement, sur A , vers f .

2) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions qui converge (simplement ou uniformément), alors sa limite est unique. converge

3) $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f , si et seulement si, $(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|)_n$ converge vers zéro, si et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ converge vers zéro telle que pour tout $x \in A$ et tout entier n , assez grand, $|f_n(x) - f(x)| \leq \lambda_n$.

Exemples 4.1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto x^n.$$

On a $(f_n)_n$ converge simplement vers

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}; f(1) = 1, f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, 1[,$$

mais elle ne converge pas uniformément vers 0. En effet, $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| \geq \sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - 0| = 1$, ne converge pas vers zéro.

Définition 4.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A . On dira que $(f_n)_n$ est **uniformément de Cauchy** si elle vérifie le **critère de Cauchy uniforme** suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \\ \forall x \in A, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 4.1. Une suite de fonctions définie sur un ensemble A , non vide, est uniformément convergente sur A si, et seulement si, elle est uniformément de Cauchy.

Démonstration. On peut vérifier facilement que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui est uniformément de Cauchy. On a pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans \mathbb{K} , donc elle converge vers une limite notée $f(x)$. La correspondance $f : A \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x)$ est une application, de plus $(f_n)_n$ converge simplement vers f . Rappelons que $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq N, \\ \forall x \in A, \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Dans ces conditions on a :

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

D'où $(f_n)_n$ converge uniformément vers f . \square

1.2. Convergence uniforme, limite et continuité.

Remarque 4.2. Dans l'exemple précédent, les fonctions f_n , $n \in \mathbb{N}$, sont continues et la limite simple f n'est pas continue au point 1. Donc la convergence simple ne suffit pas pour transporter la continuité.

Proposition 4.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** en un point a d'une partie A de \mathbb{K} , supposons de plus que $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers une fonction f sur A , alors f est **continue** en a .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. On a f_N est continue au point a , donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$,

$|x - a| < \eta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon$. D'où pour tout $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| \\ &\quad + |f_N(a) - f(a)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi f est continue en a . \square

Corollaire 4.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues sur une partie non vide** A de \mathbb{K} , supposons de plus que $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers une fonction f sur A , alors f est **continue** sur A .

Théorème 4.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues sur une partie** A de \mathbb{K} , supposons de plus que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur tout compact** de A vers une fonction f , alors f est **continue** sur A .

Démonstration. Soit $(x_k)_k$ une suite qui converge vers x dans A , montrons que $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. L'ensemble

$$K = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est un compact (voir chapitre 3, §2, exemple 3.4). Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur K , ainsi f est continue sur K . Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$. \square

Proposition 4.3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui **converge uniformément** sur une partie non vide A de \mathbb{K} vers une fonction f . Soit $a \in \bar{A}$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$ **existe**. Alors les limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ **existent** et elles **sont égales**. C'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Démonstration. Chaque f_n se prolonge en une fonction g_n continue au point a , de plus $(g_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $A \cup \{a\}$, ainsi elle converge vers une fonction g continue au point a et la restriction de g sur A est f . D'où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$. \square

Proposition 4.4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui **converge uniformément** vers une fonction f sur un intervalle $A = [a, +\infty[$ (ou $] - \infty, a]$). Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = l_n$ **existe**. Alors les limites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ **existent** et elles **sont égales**. C'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$$

1.3. Convergence uniforme, dérivée et intégrale.

Remarque 4.3. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur un segment est une fonction Riemann-intégrable. Pratiquement les fonctions fréquentées sont continues par morceaux. Ainsi on va se limiter à ces fonctions comme cas de fonctions Riemann-intégrable (au sens propre).

Proposition 4.5. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues par morceaux** sur un segment $[a, b]$, supposons de plus que $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f . Alors f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Démonstration. L'application f est continue par morceaux étant la limite uniforme de fonctions continues par morceaux (vérifier ceci en exercice). On a aussi pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx &\leq \int_a^b \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - f_n(t)| dx \\ &= (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - f_n(t)|. \quad \square \end{aligned}$$

Exemples 4.2. (*la convergence uniforme ne transporte pas la dérivée*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x|| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable (elle est de classe C^∞), mais f n'est pas dérivable au point 0.

Théorème 4.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un **intervalle borné** I de longueur l , telle que :

- 1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n **est dérivable** sur I ,
- 2) la suite de fonctions $(f'_n)_n$ **converge uniformément** vers une fonction g sur I ,
- 3) il existe $c \in I$ tel que $(f_n(c))_n$ **converge**.

Alors $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers une fonction f **dérivable** sur I et on a $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$.
c'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Démonstration. • Nous utiliserons le **théorème des accroissements finis**. On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(c) - f_n(c))| \\ \leq |x - c| \cdot \sup_{t \in I} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| \\ \leq l \cdot \sup_{t \in I} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)|. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq l \cdot \sup_{t \in I} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| \\ + |f_{n+p}(c) - f_n(c)|. \end{aligned}$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t \in I} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| < \varepsilon \text{ et } |f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \varepsilon.$$

Par suite pour tout $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < (l + 1)\varepsilon$$

Donc $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy ainsi elle est convergente uniformément vers une fonction continue f sur I . De plus pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\begin{aligned} |(f(y) - f(x)) - (f_n(y) - f_n(x))| \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} |(f_m(y) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_n(x))| \\ \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |y - x| \sup_{t \in I} |f'_m(t) - f'_n(t)| \\ = |y - x| \sup_{t \in I} |g(t) - f'_n(t)|. \end{aligned}$$

• Fixons $x \in I$, pour tout $y \in I$, $y \neq x$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x) \right| \leq \left| \frac{(f(y) - f(x)) - (f_n(y) - f_n(x))}{y - x} \right| \\ + \left| \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f'_n(x) \right| \\ + |f'_n(x) - g(x)| \\ \leq \sup_{t \in I} |g(t) - f'_n(t)| \\ + \left| \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f'_n(x) \right| \\ + |f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{t \in I} |g(t) - f'_n(t)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $y \in I \cap]x - \eta, x + \eta[$, $\left| \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f'_n(x) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall y \in I$,

$$|y - x| < \eta \implies \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x) \right| < \varepsilon.$$

D'où pour tout $x \in I$, f est dérivable en x . \square

2. Différents types de convergence pour les séries de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A . La suite de fonctions $(S_n)_n$, où $S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$, est appelée série de fonctions et elle est notée $\sum_n f_n$.

2.1. Conséquences.

Définition 4.3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A .

1) On dira que la série de fonctions $\sum_n f_n$ **converge simplement** sur A , si pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_n f_n(x)$ est convergente.

2) On dira que $\sum_n f_n$ **converge uniformément** sur A , si elle converge simplement et on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \\ \forall x \in A, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Remarque 4.4. $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A , si et seulement si, la suite formée par le sup sur A du reste d'ordre n , $(\sup_{x \in A} |R_n(x)|)_n$ converge vers zéro, si et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ converge vers zéro telle que pour tout $x \in A$ et tout entier n , $|R_n(x)| \leq \lambda_n$.

Proposition 4.6. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définie sur un ensemble non vide A . Alors $\sum_n f_n$ converge uniformément si, et seulement si, $\sum_n f_n$ est **uniformément de Cauchy**, c'est à dire elle vérifie le **critère de la convergence uniforme** :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \\ \forall x \in A, \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 4.7. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues en un point a d'une partie A de \mathbb{K} , supposons de plus que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A , alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en a .

Corollaire 4.2. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues sur une partie non vide A de \mathbb{K} , supposons de plus que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A , alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur A .

Proposition 4.8. Soit $\sum_n f_n$ une suite de fonctions continues sur une partie A de \mathbb{K} , supposons de plus que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout compact de A , alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur A .

Proposition 4.9. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur une partie non vide A de \mathbb{K} et soit $a \in \bar{A}$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$ existe. Alors les limites $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} l_n$ existent et elles sont égales. C'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Proposition 4.10. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle $A = [a, +\infty[$ ou $] -\infty, a]$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = l_n$ existe. Alors les limites $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} l_n$ existent et elles sont égales. C'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Proposition 4.11. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions **continues par morceaux** sur un segment $[a, b]$, supposons de plus que $\sum_n f_n$ **converge uniformément**. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Proposition 4.12. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle borné I de longueur l , telle que :

- 1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n **est dérivable** sur I ,
- 2) la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ **converge uniformément** sur I ,
- 3) il existe $c \in I$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ **converge**.

Alors la série de fonctions $\sum_n f_n$ **converge uniformément et dérivable** sur I . De plus on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

2.2. Autres types de convergence.

Proposition 4.13. Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions positives sur un ensemble A non vide, supposons de plus $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro, alors la série $\sum_n (-1)^n f_n$ converge uniformément.

Démonstration. Pour tout $x \in A$, $\sum_n (-1)^n f_n(x)$ est une série alternée, donc elle converge. D'après la formule de la majoration du reste, on a $|R_n(x)| \leq f_{n+1}(x)$, ainsi le reste converge uniformément vers zéro. D'où la série converge uniformément vers 0.

Définition 4.4. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble A non vide. On dira que :

- 1) $\sum_n f_n$ **converge absolument**, sur A , si la série $\sum_n |f_n|$ converge simplement sur A .
- 2) $\sum_n f_n$ **converge normalement** sur A , si on a la convergence de la série

$$\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)|.$$

Remarque 4.5. 1) $\sum_n f_n$ converge normalement sur A si, et seulement si, il existe une série convergente $\sum_n \lambda_n$ telle que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \lambda_n$.

- 2) On a la comparaison suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Convergence normale} & \implies & \text{Convergence uniforme} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Convergence absolue} & \implies & \text{Convergence simple} \end{array}$$

Les autres implications ne sont pas vraies en général.

Exemples 4.3. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n l'application définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \cap]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. On a pour tout $x \in]0, 1]$, il existe un entier **unique** $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f_n(x) \neq 0$ et la somme de la série est nulle en zéro. D'où pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| &= \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |f_k(x)| \\ &\leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, par suite elle **converge uniformément** sur $[0, 1]$. De plus la série est formée par des fonctions positives donc elle est aussi **absolument convergente**.

Mais, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$$

diverge. Ainsi la série **ne converge pas normalement**.

Exercices 4.1. *Considérons la fonction*

$$\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

- 1) Donner le domaine de définition $D(\zeta)$ de ζ .
- 2) i) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, \infty[$, où $a > 1$.
ii) En déduire que ζ est continue sur $]1, \infty[$.
- iii) En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x)$.
- 3) Montrer que ζ est dérivable sur $]1, \infty[$ (ind. considérer les intervalle $]a, b[$ avec $1 < a < b$).
- 4) Montrer que ζ est de classe C^∞ (ind. par récurrence en donnant l'expression de la dérivée k -ième).
- 5) i) Dire pour quoi la limite $l = \lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
ii) Comparer $\zeta(x)$ et la somme partielle d'ordre n de la série au point x , $x > 1$, et déduire que $l = \infty$.

Solution. 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x)$ est une série de Riemann, donc elle converge si, est seulement si, $x > 1$. Ainsi $D(\zeta) =]1, \infty[$.

2) i) On a pour tout $x \in [a, \infty[$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ et on a $a > 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge. Donc ζ converge normalement, par suite uniformément sur $[a, \infty[$.

ii) D'abord les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur $]1, \infty[$. De plus pour tout compact $K \subseteq]1, \infty[$, on a pour $a = \min K$, $K \subseteq [a, \infty[$. Ainsi ζ converge uniformément sur K . D'où d'après le cours ζ est continue sur $]1, \infty[$.

iii) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^x}$ égale à 0 si $n > 1$ et elle est égale à 1 si $n = 1$. De plus on a ζ converge uniformément sur $[2, \infty[$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

3) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1, \infty[$ et on a

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = (\exp(-x \ln(n)))' = -\ln(n) \exp(-x \ln(n)) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$$

Pour tout $x \in]a, b[$, $1 < a < b$, $\left|\left(\frac{1}{n^x}\right)'\right| \leq \frac{|\ln(n)|}{n^a}$, la série de Bertrand $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ln(n)|}{n^a}$ converge. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)'$ converge normalement, donc uniformément, sur $]a, b[$, de plus ζ converge sur un

point, quelconque de $]a, b[$, d'où d'après le cours, ζ est dérivable sur $]a, b[$ et $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}$. Ceci reste vrai sur $]1, \infty[$.

2.3. Deux théorèmes à admettre. Une suite de fonction $(f_n)_n$ est dite **croissante** sur un ensemble A si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. La suite est dite **dominée** par une fonction g si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Théorème 4.3. (Convergence monotone) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I , telle que :

- 1) $(f_n)_n$ **croissante** sur I .
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I .
- 3) $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction f **continue par morceaux** sur tout segment de I .

Alors

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Corollaire 4.3. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions **positives** et **continues par morceaux** sur I . Si de plus $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est Riemann-intégrable sur I , alors

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Théorème 4.4. (Convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I , telle que :

- 1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n **continue par morceaux** sur un intervalle I ,
- 2) $(f_n)_n$ est **dominée** par une fonction g **Riemann-intégrable** sur I ,
- 3) $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction f **continue par morceaux** sur tout segment de I .

Alors

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Corollaire 4.4. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions **continues par morceaux** sur I telle que la somme existe est continue par morceaux sur tout segment de I . Supposons de plus que $(\sum_{k=0}^n f_k)_n$ est **dominée** par une fonction g **Riemann-intégrable** sur I .

Alors

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

3. Séries entières.

3.1. Définitions et propriétés.

Définition 4.5. Une série entière est une série de fonction définie sur une partie de \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) qui est de la forme $S(x) = \sum_n a_n x^n$, où $(a_n)_n$ est une suite réelle ou complexe.

Proposition 4.14. Toute série entière $S = \sum_n a_n x^n$ possède un **rayon de convergence** $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, c'est à dire que R est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \text{ on a } \begin{cases} \text{si } |x| > R, & \text{alors } S(x) \text{ diverge} \\ \text{si } |x| < R, & \text{alors } S(x) \text{ converge absolument} \end{cases}$$

Démonstration. • Remarquons d'abord que pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, tel que $|x| < |y|$, si $S(y)$ converge, alors $S(x)$ converge absolument. En effet, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n y^n|} \cdot \frac{|x|}{|y|}$, on a $|a_n y^n| \rightarrow 0$, donc pour n assez grand $\sqrt[n]{|a_n y^n|} \leq 1$. Ainsi, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \cdot \frac{|y|}{|x|} \leq 1$. D'où, d'après la règle de Cauchy, $\sum_n |a_n x^n|$ converge .

• Posons

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : S(r) \text{ converge absolument}\}.$$

On a R existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, car l'ensemble

$$\{r \in \mathbb{R}^+ : S(r) \text{ converge absolument}\}$$

et non vide puisque il contient zéro. D'après la première partie de la preuve pour tout $x \in \mathbb{K}$, tel que $|x| < R$ on a pour $r = \frac{|x|+R}{2}$, $S(r)$ converge, ainsi $S(x)$ converge absolument. Si $|x| > R$, on a $S(x)$ converge car sinon, $S(\frac{|x|+R}{2})$ converge, mais $\frac{|x|+R}{2} > R$ absurde. D'où R vérifie les conditions de la proposition. \square

Définition 4.6. 1) L'élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ donné dans la proposition précédente est appelé **rayon de convergence** de S .

2) Le disque $\{x \in \mathbb{K} : |x| < R\}$ (resp. $] - R, R[$) est dit le **disque** (resp. l'**intervalle**) **ouvert de convergence** de la série.

Proposition 4.15. Soit $S(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière. Alors on a :

1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe, alors le rayon de convergence de S est $R = \frac{1}{l}$ (avec les notations $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

2) Si pour n assez grand $a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de S est $R = \frac{1}{l}$.

Démonstration. 1) Soit $x \in \mathbb{K}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x|$, donc, d'après la règle de Cauchy, la série $S(x)$ converge absolument pour $l \cdot |x| < 1$ et elle diverge pour $l \cdot |x| > 1$. Ainsi $R = \frac{1}{l}$.

2) Soit $x \in \mathbb{K}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = l \cdot |x|$, donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $S(x)$ converge absolument pour $l \cdot |x| < 1$ et elle diverge pour $l \cdot |x| > 1$. Ainsi $R = \frac{1}{l}$. \square

Proposition 4.16. (Somme et produit) Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ (resp. $g(x) = \sum_n b_n x^n$) une série entière de rayon de convergence R_f (resp. R_g), alors on a :

1) La série somme $(f + g)(x) = \sum_n (a_n + b_n) x^n$ est une série entière de rayon $R_{f+g} \geq \min\{R_f, R_g\}$.

2) La série produit (de Cauchy)

$$h = \sum_n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

est une série entière de rayon de convergence $R_h \geq \min\{R_f, R_g\}$

Démonstration. On a si $x \in \mathbb{K}$ vérifiant $|x| < \min\{R_f, R_g\}$, alors $f(x)$ et $g(x)$ convergent absolument. Donc, au point x , la série somme et la série produit convergent absolument. \square

Proposition 4.17. (Convergence normale) Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f converge normalement sur tout disque $\{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$ de centre zéro et de rayon $r < R$.

Démonstration. Soit $0 \leq r < R$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| \leq r$, $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$, et d'après la définition de R , la série $\sum_n |a_n r^n|$ converge. Ainsi f converge normalement sur le disque $\{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$. \square

Corollaire 4.5. (Continuité) Toute série entière est continue sur son disque ouvert de convergence

Démonstration. Soit R le rayon de convergence d'une telle série. Si $R = 0$ on a rien à démontrer. Si $R > 0$, alors pour tout compact $K \subseteq \{x \in \mathbb{K} : |x| < R\}$ on a $r = \max_K |k|$ existe donc $r < R$ et $K \subseteq \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$. D'où la série entière converge normalement, donc uniformément, sur K . De plus les fonctions qui déterminent la série sont continues sur $\{x \in \mathbb{K} : |x| < R\}$, d'où la série est continue sur $\{x \in \mathbb{K} : |x| < R\}$. \square

Proposition 4.18. (Primitive) Toute série entière $f(x) = \sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, possède une **primitive** sur $] -R_f, R_f[$. De plus toute primitive F de f est donnée par

$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$, c'est une **série entière** sur \mathbb{R} de **même rayon de convergence** que f , c'est à dire $R_F = R_f$.

Démonstration. Exercice (elle découle aussi de la proposition suivante). \square

Proposition 4.19. (Dérivation) *Tout série entière $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, est dérivable sur $] -R_f, R_f[$ et sa dérivé $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ est une **série entière** sur \mathbb{R} de **même rayon de convergence**, c'est à dire $R_{f'} = R_f$.*

Démonstration. pour tout $r \in]0, R_f[$, soit $s \in]r, R_f[$, on a pour n assez grand $\frac{n+1}{s} (\frac{r}{s})^n \leq 1$, donc $|(n+1)a_{n+1}r^n| = |a_{n+1}s^{n+1}| \cdot |\frac{n+1}{s} (\frac{r}{s})^n| \leq |a_{n+1}s^{n+1}|$. La série $\sum_n |a_{n+1}s^{n+1}|$ converge donc $\sum_n (n+1)a_{n+1}r^n$, converge absolument d'où $\sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$ et de rayon de convergence $R_{f'} \geq R_f$ et il est évident que $R_{f'} \leq R_f$. Ainsi la série des dérivées converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $] -r, r[$, avec $r \in]0, R_f[$. On a $f(0)$ converge donc f est dérivable sur $] -r, r[$ et on a $f'(x) = \sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$. Donc ceci reste vrai sur $] -R_f, R_f[$. \square

Corollaire 4.6. (Classe C^∞) *Tout série entière $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, est de classe C^∞ sur $] -R_f, R_f[$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_n (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n$$

est une **série entière** sur \mathbb{R} de **même rayon de convergence**, c'est à dire $R_{f^{(k)}} = R_f$.

Démonstration. Par récurrence. \square

Corollaire 4.7. *Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Démonstration. On a pour tout entier k ,

$$f^{(k)}(0) = (0+k) \cdots (0+1) a_{0+k} + (1+k) \cdots (1+1) a_{1+k} 0^1 + \cdots + (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} 0^n + \cdots = k! \cdot a_k. \square$$

Remarque 4.6. (Définition et notation) Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_f > 0$, alors

$$\sum_n (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n$$

est une série entière sur \mathbb{C} de rayon R_f . Une telle série sera appelée **dérivée d'ordre k** de f est elle sera notée $\mathbf{f}^{(k)}$.

Exercices 4.2. Une fonction définie sur un ouvert, non vide, U de \mathbb{C} est dite **holomorphe** sur U , si pour tout $z_0 \in U$, la limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite sera notée $f'(z_0)$. Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_f > 0$ et soit f^1 sa série dérivée définie dans la remarque précédente. Montrer que pour tout $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_f\}$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f^1(z_0).$$

Solution. On a $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n z^n - a_n z_0^n)$. Remarquons que $a_n z^n - a_n z_0^n = a_n (z - z_0) u_n(z)$, où $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$. Donc

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z)$$

Soit $r \in]|z_0|, R_f[$. Pour tous $|z| < r$ et $n \geq 1$, on a

$$|a_n u_n(z)| \leq |a_n| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = |a_n| n r^{n-1}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ converge, car sur \mathbb{R} , f^1 et de rayon R_f donc elle converge absolument sur $[0, R_f[$. D'où la série de fonctions $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \setminus \{z_0\}$. D'après le cours

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} a_n u_n(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z_0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1} \end{aligned}$$

3.2. Fonctions développables en séries entières.

Définition 4.7. Une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 est dite **développable en série entière au voisinage de 0** s'il existe un intervalle $] -r, r[$, où $r > 0$, et une série entière $\sum_n a_n x^n$ définie sur $] -r, r[$ tels que $f(x) = \sum_n a_n x^n$ pour tout $x \in] -r, r[$. Dans ce cas on dit aussi que f est développable en série entière sur $] -r, r[$.

Proposition 4.20. *Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors cette série est donnée par*

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque 4.7. 1) Une fonction qui est développable en série entière au voisinage de zéro est de classe C^∞ . De plus sa série de Mac-Laurin est convergente.

2) Les conditions précédentes ne sont pas suffisantes pour dire que la fonction est développable en série entière. Soit par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , par récurrence on montre que f est indéfiniment dérivable au point 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n . D'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$, pour tout x , mais f s'annule seulement au point 0 donc pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Ainsi f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Proposition 4.21. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $] -R, R[$, avec $R > 0$, pour que f soit développable en série entière sur $] -R, R[$, il suffit que pour tout $r \in]0, R[$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in]-r, r[} |f^{(n)}(x)| \frac{r^n}{n!} = 0.$$

Démonstration. D'après la formule de Mac-Laurin pour tout $x \in]-R, R[$, soit $r \in]|x|, R[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ dépendant de x et n tel que

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)x^k}{k!} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \sup_{x \in]-r, r[} |f^{(n+1)}(x)| \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0. \quad \square$$

3.3. Exemples de fonctions développables en séries entières.

1) Fonction exp. • On a $\exp(x)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

• Pour tout $r > 0$, $\sup_{x \in]-r, r[} |\exp^{(n)}(x)| \frac{r^n}{n!} \leq \exp(r) \frac{r^n}{n!} \longrightarrow 0$.

• Donc cette fonction est développable en série entière sur \mathbb{R} et $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2) Nous déduisons que cosh et sinh sont développables en séries entières sur \mathbb{R} et

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3) Fonctions cos et sin. Ces deux fonctions sont développables en séries entières sur \mathbb{R} et

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4) Fonction arctan. • On a $\arctan(x)$ est de classe C^∞ .

• $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc $\arctan'(x)$ est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et on a $\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

• \arctan s'annule en 0, donc elle est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et on a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3.4. Extension à \mathbb{C} .

1) La série $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est bien définie sur \mathbb{C} . Cette fonction sera appelée fonction exponentielle complexe. On a les propriétés :

• $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.

• Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

• Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\{u \in \mathbb{C} : \exp(u) = z\} = \{\ln(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$.

D'autre part, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = |\exp(x) \exp(iy)| = \exp(x) \in \mathbb{R}^{*+}$.

2) On peut définir les fonctions \sin , \cos , \sinh , \cosh complexes comme sommations des séries entières sur \mathbb{C} de rayon infinie :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De plus on a les propriétés suivantes :

• $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$, $\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$, $\cos(z + z') = \cos(z) \cos(z') - \sin(z) \sin(z')$,

$\sin(z + z') = \cos(z) \sin(z') + \sin(z) \cos(z')$ et $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

• $\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$, $\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$ et $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

• $\sin(z) = \sinh(iz)$ et $i \sin(z) = \sinh(z)$.

• $\cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) + i \sin(x) \sinh(y)$ et $\sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) - i \cos(x) \sinh(y)$.

3) Les fonctions $(1+z)^{-1}$, $\ln(1+z)$, $\arctan(z)$ sont définies sur le disque unité ouvert de \mathbb{C} par des séries entières et on a :

• $(1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, $\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercices 4.3. 1) *Étendre autres fonctions aux certains disques de \mathbb{C} de centre zéro (par exemple $(1+z)^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ...).*

2) *Vérifier les propriétés données dans les exemples précédents.*

4. Série n° 4.

Exercice 1. Soit $(P_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$$

- 1) Vérifier que $(P_n)_n$ est une suite de polynômes, majorée par \sqrt{x} et croissante.
- 2) En déduire que cette suite converge simplement vers \sqrt{x} .
- 3) Etablir, par récurrence, les inégalités :

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$

Indication : Si l'inégalité est vraie pour n , vérifier que

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \frac{2 + (n-1)\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

Puis conclure l'inégalité pour $n+1$ en remarquant que

$$(2 + (n-1)\sqrt{x})(2 + (n+1)\sqrt{x}) \leq (2 + n\sqrt{x})^2 - x \leq (2 + n\sqrt{x})^2.$$

- 4) En déduire que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers \sqrt{x} sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \exp(-nx^2)$.

- 1) Montrer que g est partout définie et continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs et tendant vers $+\infty$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$ (*).

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que (*) converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha \in]0, +\infty[$.
- 3) En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
- 4) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
- 5) A l'aide de ce qui précède montrer la relation suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

- 6) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières, de terme général $u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dans les cas suivants ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\text{a) } u_n = \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n} \quad (n \geq 1); \quad \text{b) } u_n = \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}; \quad \text{c) } u_n = \frac{nx^n}{(2n+1)!}$$

Exercice 5. (Une formule sur π découverte en 1995) Considérons pour tout entier $p \geq 1$, la série entière

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p}$$

- 1) Montrer que f_p converge sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
- 2) En déduire que f_p et de rayon de convergence $R_p > 1$.
- 3) Calculer la dérivée f'_p .
- 4) En déduire que pour $x \in [0, 1]$,

$$f_p(x) = \int_0^x \frac{16t^{p-1}}{16-t^8} dt$$

- 5) Calculer $4f_1(1) - 2f_4(1) - f_5(1) - f_6(1)$ (ind. remarquer

$4 - 2t^3 - t^4 - t^5 = -(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)$ et $16 - t^8 = -(t^2-2)(t^2+2)(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)$, puis calculer l'intégrale). En déduire une formule de π .

Exercice 6. Déterminer le développement en série entière à l'origine des fonctions suivantes en précisant l'intervalle ouvert de convergence :

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}; \quad e^{(xch(\alpha))} ch(xsh(\alpha)); \quad e^{(x \cos(\alpha))} \sin(x \sin(\alpha)); \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \tan(\alpha)\right)$$

Exercice 7. Soit f la fonction : $] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow (\arcsin(x))^2$.

- 1) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2 \quad (*)$$

- 2) Déterminer toutes les séries entières solutions de (*) sur $] -1, 1[$.
- 3) Justifier pourquoi f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et déduire son développement.

Solution de la série 4.

Exercice 1. Nous supposons toujours que $x \in [0, 1]$. 1) • Il est simple de voir que P_n est un polynôme (il est de degré 2^{n-1} , $n \geq 1$).

• Par récurrence, Supposons que $P_n(x) \leq \sqrt{x}$. On a $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)))$. Or $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \geq 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{x}) \geq 0$. D'où $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$.

• $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$. Par récurrence, on montre que $P_n(x) \geq 0$. Donc $x - (P_n(x))^2 \geq 0$. D'où $P_{n+1} \geq P_n(x)$.

2) Pour $x \in [0, 1]$, la suite numérique $(P_n(x))_n$ est croissante majorée donc elle converge vers une limite l . De plus il découle de $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$, que $l = l + \frac{1}{2}(x - l^2)$, de plus on a $l \geq 0$, donc $l = \sqrt{x}$.

3) Voir les indications.

4) L'étude des variations de $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$, sur $[0, 1]$ (où directement), permet de voir que $\sup_{x \in [0,1]} \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{1}}{2+n\sqrt{1}} = \frac{2}{2+n}$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - P_n(x)| = 0$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(x) = (\frac{1}{n})^2 \exp(-nx^2)$.

1) g_n est définie et continue sur \mathbb{R} et $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Donc la série converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} , ainsi g est définie et continue sur \mathbb{R} .

2) g_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $g'_n(x) = -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$. Calculons le $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{2x}{n} e^{-nx^2}$. L'étude des variations de $x \mapsto \frac{2x}{n} e^{-nx^2}$ sur \mathbb{R}^+ , montre que le sup est atteint au point $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'_n(x)| = |g'_n(\frac{1}{\sqrt{2n}})| = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} e^{-1/2}$. Donc $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x)$ converge normalement sur \mathbb{R} donc elle est continue. De plus on a $g(0)$ converge, donc d'après le cours pour tout intervalle $] -r, r[$, $r > 0$, g est dérivable et $g'(x) = h(x)$. Donc g est de classe C^1 sur $] -r, r[$, $r > 0$, ainsi elle est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Posons $f_n(x) = \exp(-\lambda_n x)$. 1) • Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \geq 1$, donc le terme général de la série ne tend pas vers zéro, d'où la série diverge.

• Si $x > 0$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante, positive et elle converge vers zéro, ainsi la série est une série alternée onc elle converge. D'où le domaine de définition de f est $]0, \infty[$.

2) Soit $\alpha > 0$, la série converge simplement sur $[\alpha, \infty[$. De plus, d'après le théorème de la majoration du reste $|f(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k f_k(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(\alpha) \rightarrow 0$. Ainsi on a la convergence uniforme sur $[\alpha, \infty[$.

3) Pour tout $\alpha > 0$, les fonctions sont continue sur $[\alpha, \infty[$ et on a la convergence uniforme. Donc f est continue sur $[\alpha, \infty[$, $\alpha > 0$, par suite f est continue sur $]0, \infty[$.

4) On a f est continue sur $]0, \infty[$ et $|f(x)| \leq f_1(x)$ (majoration du reste), de plus il est clair que $\int_0^\infty f_1(x)dx$ existe. Donc f est absolument intégrable sur $]0, \infty[$, ainsi $\int_0^\infty f(x)dx$ est convergente.

5) On a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f_n(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} \right]_0^c = -\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} = \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

$$\left| \int_0^\infty f(x)dx - \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \right| = \left| \int_0^\infty (f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x))dx \right| \leq \int_0^\infty |f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)|dx$$

$$\leq \int_0^\infty f_{m+1}(x)dx = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \longrightarrow 0.$$

6) Pour $\lambda_n = n$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (-\exp(-x))^n = \frac{-\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$. Donc

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^\infty \frac{-\exp(-x)}{1+\exp(-x)} dx \stackrel{u=\exp(-x)}{\equiv} \int_1^0 \frac{1}{1+u} du = -[\ln(1+u)]_0^1 = -\sqrt{2}.$$

Exercice 4. a) On a pour $x \in]-1, 1[$, $|u_n(x)| \leq |x|^n$, donc la série converge. Remarquons que $\cos(n\alpha)$ ne converge pas vers zéro. Donc pour $|x| > 1$, u_n ne converge pas vers zéro donc la série diverge. D'où le rayon de convergence est 1. On a aussi $u'_n(x) = x^{n-1} \cos(n\alpha) = \frac{1}{2}(x^{n-1}e^{i n \alpha} + x^{n-1}e^{-i n \alpha})$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty u'_n(x) &= \frac{e^{i\alpha}}{2} \sum_{n=1}^\infty (e^{i\alpha}x)^{n-1} + \frac{e^{-i\alpha}}{2} \sum_{n=1}^\infty (e^{-i\alpha}x)^{n-1} = \frac{e^{i\alpha}}{2(1-xe^{i\alpha})} + \frac{e^{-i\alpha}}{2(1-xe^{-i\alpha})} \\ &= \frac{\cos(\alpha)-x}{1-2x\cos(\alpha)+x^2} = \frac{-1}{2} \ln'(|x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1|) \end{aligned}$$

De plus on a $\sum_{n=1}^\infty u_n(0) = 0 = \frac{-1}{2} \ln(|0^2 - 2 \cdot 0 \cos(\alpha) + 1|)$, donc

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \frac{-1}{2} \ln(|x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1|), \quad x \in]-1, 1[.$$

b) Il est clair que le rayon de convergence est $+\infty$. • Pour $x = 0$, $\sum_{n=0}^\infty u_n(0) = 1$.

• Pour $x > 0$, on a $\sqrt{x}u_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $\sqrt{x} \sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \sin(\sqrt{x})$.

• Pour $x < 0$, $x = -\sqrt{-x}$, donc $\sqrt{-x}u_n(x) = \frac{\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi $\sqrt{-x} \sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \sinh(\sqrt{-x})$.

D'où

$$g(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Il est clair que le rayon de convergence est $+\infty$. Remarquons que $u_n(x) = xg'_n(-x)$, où $g_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$. Donc $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = xg'(-x)$, où g est la fonction définie dans (b).

Exercice 5. 1) Pour $|x| < \sqrt{2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p} \right| \leq \sqrt{2}^p \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^8}{16} \right)^n$$

cette série converge car $\frac{|x|^8}{16} < 1$. D'où $f_p(x)$ converge sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

2) On a $R_p \geq \sqrt{2} > 1$.

3) Sur $] -R_p, R_p[$,

$$f'_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8n+p}{16^n} \frac{x^{8n+p-1}}{8n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{8n+p-1}}{16^n} = x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{8n}}{16^n} = x^{p-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^8}{16}}$$

4) f_p est une primitive de f'_p sur $[0, 1]$ qui s'annule au point zéro. Donc pour $x \in [0, 1]$,

$$f_p(x) = \int_0^x f'_p(t) dt = \int_0^x \frac{16t^{p-1}}{16 - t^8} dt.$$

5) On a pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} 4f'_1(t) - 2f'_4(t) - f'_5(1) - f'_6(t) &= \frac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{(t^2 - 2)(t^2 + 2)(t^2 + 2t + 2)(t^2 - 2t + 2)} \\ &= \frac{(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)}{16-t^8} = \frac{1}{8(t+\sqrt{2})} + \frac{-t+2}{4(t^2-2t+2)} + \frac{1}{8(t-\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{8(t+\sqrt{2})} - \frac{2t-2}{8(t^2-2t+2)} + \frac{1}{4(t^2-2t+2)} + \frac{1}{8(t-\sqrt{2})} \\ 4f_1(1) - 2f_4(1) - f_5(1) - f_6(1) &= \left[\frac{1}{8} \ln(t+\sqrt{2}) - \frac{1}{8} \ln(t^2-2t+2) + \frac{1}{4} \arctan(t-1) + \frac{1}{8} \ln(|t-\sqrt{2}|) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{16} \Rightarrow \pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \frac{1}{16^n} \end{aligned}$$

Exercice 6. • On a $\ln(1+t)$ et $(1+t)^{-1}$ sont développables en séries entières sur $] -1, 1[$, donc $\ln(1+t)(1+t)^{-1}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$\frac{\ln(1+t)}{1+t} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1)^{n-k} \right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1}}{k} \right) t^n.$$

Pour $t = 1$, $\left| \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1}}{k} \right) 1^n \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right| \rightarrow \infty \neq 0$. D'où $] -1, 1[$ est l'intervalle ouvert de convergence.

- L'intervalle ouvert de convergence est \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} e^{(xch(\alpha))} ch(xsh(\alpha)) &= e^{xch(\alpha)} \frac{1}{2} (e^{xsh(\alpha)} + e^{-xsh(\alpha)}) = \frac{1}{2} (e^{xch(\alpha)+xsh(\alpha)} + e^{xch(\alpha)-xsh(\alpha)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{xe^\alpha} + e^{xe^{-\alpha}}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^\alpha)^n + (e^{-\alpha})^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ch(n\alpha)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

- Posons $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \tan(\alpha)\right)$. On a f est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{((1-x) \cos(\alpha))^2 + ((1+x) \sin(\alpha))^2} = \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{(1-e^{i2\alpha}x)(1-e^{-i2\alpha}x)} = \frac{i}{2} \left(\frac{e^{-i2\alpha}}{1-e^{-i2\alpha}x} - \frac{e^{i2\alpha}}{1-e^{i2\alpha}x} \right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i2\alpha(n+1)} - e^{i2\alpha(n+1)}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(2\alpha(n+1)) x^n \end{aligned}$$

On suppose que $\alpha \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $f(0) = \alpha$, donc pour $x \in] -1, 1[$, qui est l'intervalle ouvert de convergence,

$$f(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n} x^n.$$

Exercice 7. 1) Calcul direct.

2) Supposons que $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une série entière solution de (*) sur $] -1, 1[$. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, & h''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n, \\ xh'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, & x^2 h''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2 &= (1-x^2)h''(x) - xh'(x) \\ &= 2a_2 + (6a_3 - a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n)x^n \\ &= 2a_2 + (6a_3 - a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n)x^n. \end{aligned}$$

Ainsi $a_2 = 1$, $6a_3 - a_1 = 0$, et pour $n \geq 2$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0$. Donc

$$a_{2p} = \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}, \quad p \geq 1,$$

$$a_{2p+1} = \frac{(2p-1)^2 \cdots 3^2}{(2p+1)!} a_1 = \frac{((2p)!)^2}{(2p+1)! \cdot 2^{2p} \cdot p!} a_1 = \frac{(2p)!}{(2p+1) \cdot 2^{2p} \cdot p!} a_1.$$

D'où $h(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} x^{2p} + a_1 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{(2p+1) \cdot 2^{2p} \cdot p!} x^{2p+1}$. De plus pour $0 \neq |x| < 1$, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{2^{2p+1}((p)!)^2}{(2(p+1))!} x^{2(p+1)} \right|}{\left| \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} x^{2p} \right|} = x^2 < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(2(p+2))!}{(2(p+3)) \cdot 2^{2(p+1)} \cdot (p+1)!} x^{2(p+3)} \right|}{\left| \frac{(2p)!}{(2p+1) \cdot 2^{2p} \cdot p!} x^{2p+1} \right|} = x^2 < 1.$$

Donc d'après la règle de d'Alembert les deux séries $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} x^{2p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{(2p+1) \cdot 2^{2p} \cdot p!} x^{2p+1}$ convergent sur $] -1, 1[$, donc h converge sur $] -1, 1[$.

3) la fonction $\arcsin(x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$, donc le produit $f(x) = \arcsin^2(x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$. De plus f est paire donc $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p}x^{2p}$, $b_0 = f(0) = 0$ donc $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} b_{2p}x^{2p}$. D'où d'après la question précédente on a $b_{2p} = a_{2p}$, $p \geq 1$, ainsi sur $] -1, 1[$, $\arcsin^2(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} x^{2p}$.

CHAPITRE 5

Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Série n° 5.

Exercice 1. Soient f la fonction 2π -périodique paire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

- 1) Donner la série de Fourier de la fonction f .
- 2) Dédire une décomposition de \sin , sur $[0, \pi]$ en une série donnée par $\cos(nx)$.
- 3) En considérant l'intégrale $\int_0^x \sin(t)dt$, $x \in [0, \pi]$, déduire une décomposition de $\cos(x) + \frac{2}{\pi}x$, sur $[0, \pi]$ en une série donnée par $\sin(nx)$ (Justifier la permutation intégrale-somme).

Exercice 2. Soit f l'application 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}$.

- 1) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- 2) i) Donner $S(f)$ la série de Fourier de f ,
ii) Montrer que $f = S(f)$.
- iii) Montrer sans calcul que $S(f)$ converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.
- 3) Dédire les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

- 1) Montrer que f et g sont de classe C^1 . Calculer la dérivée de $f + g$.
- 2) Vérifier que $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \frac{\pi}{4}$. Dédire $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.
- 3) En déduire que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

1) En utilisant les conditions de domination montrer que,

i) F est de classe C^1 sur $]0, \infty[$.

ii) Démontrer que pour $x > 0$, $F(x) = \lambda - \arctan(x)$.

iii) Vérifier que pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$. Démontrer la valeur de λ .

2) i) Vérifier que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ où $u_n = e^{-n\pi x} \int_0^{\pi} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t+n\pi} dt$.

ii) Vérifier que la série définie dans 2), i), est une série alternée.

iii) Démontrer que F est continue sur $[0, \infty[$.

iv) Démontrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercices facultatifs.

Exercice 1. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, impaire périodique de période 2π , définie par : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi]$; les valeurs de $f(0)$ et $f(\pi)$ étant quelconques. Calculer la somme de la série de f et déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 2. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 2π , définie par : $f(t) = t^2 - 2\pi^2$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 3. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 2π , définie par : $f(t) = \cos(\alpha t)$ pour $t \in]-\pi, \pi]$ où α est un réel qui n'est pas un entier. En déduire la relation suivante pour tout réel non multiple de π :

$$\cotan(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

Exercice 4. Soit $C_{2\pi}$ l'ensemble de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continues périodiques de période 2π . Pour f et g dans $C_{2\pi}$, soit $f * g$ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)du .$$

- 1) a) Vérifier que $f * g$ est un élément de $C_{2\pi}$.
- b) Montrer que $(C_{2\pi}, +, *)$ est un anneau commutatif.
- 2) Pour $f \in C_{2\pi}$, notons $c_n(f)$ le coefficient de Fourier de f associé à $e_n : t \rightarrow e^{int}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
 - a) vérifier que $e_n * e_m = \delta_{n,m}e_n$.
 - b) Montrer que pour f, g dans $C_{2\pi}$, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
- 3) (Application) Proposer une méthode pour calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de Γ .
- 2) Montrer que Γ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R}_*^+ et déduire que Γ est continue sur \mathbb{R}_*^+ .
- 3) Pour $x > 0$ montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- 4) Montrer que l'on peut prolonger continument Γ à $R \setminus (-N)$.
 5) Montrer que Γ est de classe C^∞ et donner $\Gamma^{(k)}(x)$.

Exercice 6. On considère pour $x \in R$, $I(x) = \int_0^\infty e^{-t^2-x^2/t^2} dt$.

- 1) Montrer que $I(x)$ est continue sur R et dérivable sur R^* .
 2) Montrer que I satisfait une équation différentielle du premier ordre. Donner $I(x)$.

Solution de la série 5.

Exercice 1. 1) f est paire donc $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \sin(nx) dx$ donc

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} (1 + (-1)^n) & \text{si } n \neq 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$2) S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2px).$$

On a f est continue sur $[-\pi, \pi]$, f est dérivable sur $] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$ est les dérivées à droite et à gauche de f aux points $-\pi, 0$ et π existent, donc d'après Dirichlet $S(f)(x) = f(x)$ sur $[-\pi, \pi]$. D'où sur $[0, \pi]$, $\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2px)$.

3) La série $\frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2px)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, \pi]$, ceci découle du fait que $|\frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2px)| \leq \frac{4}{\pi((2p)^2-1)}$ (On peut appliquer aussi "Dirichlet uniforme"). Donc

$$\begin{aligned} -\cos(x) + 1 &= \int_0^x \sin(t) dt = \int_0^x \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^\infty \left(\frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2pt) \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} x + \sum_{p=1}^\infty \int_0^x \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)} \cos(2pt) dt = \frac{2}{\pi} x + \sum_{p=1}^\infty \frac{2}{\pi(1-(2p)^2)p} \sin(2pt) \end{aligned}$$

D'où pour $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) + \frac{2}{\pi} x = 1 - \sum_{p=1}^\infty \frac{2}{\pi(1-(2p)^2)p} \sin(2pt)$.

Exercice 2. 1) f est impaire donc $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x^3 - \pi^2 x}{12} \cos(nx) dx$. Par une des intégrations par partie on trouve $b_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^3} = \frac{(-1)^n}{n^3}$.

$$2) \text{ i) } S(f)(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

ii) f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$ donc d'après Dirichlet $f = S(f)$.

iii) f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, donc d'après Dirichlet uniforme on a $S(f)$ converge uniformément vers f .

$$3) \text{ On a } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^3} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

$$\text{D'où } \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \pi^2 \frac{\pi}{2}}{12} = - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}, \text{ ainsi } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{3\pi^3}{8 \cdot 12} = \frac{\pi^3}{32}.$$

D'après Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{x^3 - \pi^2 x}{12} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right|^2 \text{ d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{945} \pi^6.$$

Exercice 3. 1) f n'est autre que le carré d'une fonction primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, qui est continue sur \mathbb{R} , donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , de plus $f'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)e^{-x^2}$.

On a • l'application $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, est définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, • $\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ existe et continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, donc d'après Leibniz g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et on a $g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt$.

Le changement de variable $u = xt$ permet d'avoir $g'(x) = \int_0^x -2e^{-x^2-u^2} du = -f'(x)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)'(x) = 0$.

2) On a $0 \leq g(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \frac{\pi}{4}$. On a $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} \frac{\pi}{4} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

3) L'application $h(x) = f(x) + g(x)$ est constante sur \mathbb{R} , $h(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$. Donc $|\int_0^\infty e^{-t^2} dt| = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x) + g(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Or $\int_0^\infty e^{-t^2} dt \geq 0$, donc $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4. Posons $f(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$. On a $|e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| \leq e^{-tx}$ et $\int_0^\infty e^{-tx} dt$ existe pour tout $x > 0$, d'où F est définie sur $]0, \infty[$. De plus pour $x = 0$, $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe (une intégration par parités permet de conclure) d'où F est définie sur $[0, \infty[$.

1) i) Soit $a > 0$, pour $(x, t) \in]a, \infty[\times]0, \infty[$, $\frac{\partial}{\partial x} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$ existe et continue, $|\frac{\partial}{\partial x} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| = |e^{-tx} \sin(t)| \leq e^{-ta}$ et $\int_0^\infty e^{-ta} dt$ est convergente. Donc F est de classe C^1 sur $]a, \infty[$, pour tout $a > 0$, d'où elle est de classe C^1 sur $]0, \infty[$.

ii) Par une intégration par parties deux fois on trouve que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. D'où il existe une constante λ , telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = \lambda - \arctan(x)$.

iii) On a pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leq \int_0^\infty |e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| dt \leq \int_0^\infty e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, ainsi $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\lambda - \arctan(x)) = \lambda - \frac{\pi}{2}$. D'où $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

2) i) On a $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le changement de variable $s = t - n\pi$, permet d'avoir

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^\pi e^{-(s+n\pi)x} \frac{\sin(s+n\pi)}{s+n\pi} ds = e^{-n\pi x} \int_0^\pi e^{-sx} \frac{\sin(s+n\pi)}{s+n\pi} ds \\ &= (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi e^{-sx} \frac{\sin(s)}{s+n\pi} ds = (-1)^n u_n. \end{aligned}$$

ii) Il est clair que $(u_n)_n$ est décroissante, en n , et positive, de plus pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on a $u_n \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. D'où $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ est une série alternée.

iii) Une application directe du théorème de continuité des intégrales simples dépendants d'un paramètre, assure que u_n est continue sur $[0, \infty[$. De plus pour tout $x \geq 0$, $u_n(x) \leq \frac{1}{n}$. D'où la série converge uniformément sur $[0, \infty[$, ainsi F est continue sur $[0, \infty[$.

iv) On a $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE 6

Calcul différentiel

1. Applications différentiables.

Dans ce paragraphe E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une application et $x \in U$.

Définition 6.1. • L'application f est dite différentiable au point x , s'il existe une application linéaire $L : E \rightarrow F$ telle que

$$f(x+h) - f(x) - L(h) = o(h).$$

• Si f est différentiable en tout point de U on dit alors que f est différentiable sur U .

Remarque 6.1. 1) L'application L de la définition est continue car elle est définie sur un espace de dimension finie.

2) On a l'équivalence

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - L(h) = o(h) \\ \iff \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

3) Si $E = \mathbb{R}$, alors une application f définie d'un ouvert U de \mathbb{R} dans F et différentiable en un point $x \in U$ si, et seulement si, elle est dérivable en x , c'est à dire $f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ existe. Dans ce cas on peut **identifier** l'application L de la définition 6.1 à $f'(x)$. Remarquons que le premier membre de l'égalité précédente est une application linéaire et le deuxième membre est un vecteur, ceci à un sens grâce à l'identification de toute application linéaire $L : \mathbb{R} \rightarrow F$ au vecteur $L(1)$ de F .

Proposition 6.1. *Si f est différentiable, alors on a :*

1) *L'application linéaire L , de la définition 6.1, est unique, elle sera notée $Df(x)$, $df(\mathbf{x})$, $df_{\mathbf{x}}$ ou $f'(x)$.*

2) *f est continue au point x .*

Démonstration. 1) Supposons qu'il existe une application linéaire K vérifiant la même formule. Alors l'application linéaire $U = L - K = o(h)$. Donc

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|U(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, non nul, on a pour $t \in]0, \infty[$:

$$\frac{\|U(x)\|}{\|x\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|U(tx)\|}{\|tx\|} = 0$$

D'où $\|U(x)\| = 0$, ainsi $U = 0$ et $L = K$.

2) On a $f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h)$, donc $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} L(h) + o(h) = 0$. \square

Remarque 6.2. 1) Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable sur l'ouvert U , l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors

- on peut définir l'application

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F); x \mapsto df(x).$$

Alors, si df est continue en un certain point x de U (resp. sur U) on dit que f est **continument différentiable** au point x (resp. sur U);

- de même on peut définir les différentielles d'ordre supérieur (1, 2, ...). Si la k -ème différentielle de f existe et continue on dit que f est de **classe C^k** .

- si f est de classe C^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de **classe C^∞** .

2) Il est simple de voir que si f et g sont différentiables en un point x (resp. sur l'ouvert U) alors $\lambda f + \beta g$, où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, est différentiable en un point x (resp. sur l'ouvert U). De plus

$$d(\lambda f + \beta g)(x) = \lambda df(x) + \beta dg(x).$$

Théorème 6.1. *Soit U (resp. V) un ouvert de E (resp. F) et soit $x \in U$. Supposons que $f : U \rightarrow F$ est différentiable en x , $f(x) \in V$ et $g : V \rightarrow G$ est différentiable en $f(x)$, où G est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $g \circ f$ est différentiable en x et on a :*

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Démonstration. Posons

$$\Delta = g \circ f(x+h) - g \circ f(x)$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= g(f(x) + df(x) \cdot h + o(h)) - g(f(x)) \\
&= dg(f(x))(df(x) \cdot h + o(h)) + o(df(x) \cdot h + o(h)) \\
&= dg(f(x)) \circ df(x) \cdot h + r(h),
\end{aligned}$$

où $r(h) = dg(f(x)) \cdot (o(h)) + o(df(x) \cdot h + o(h))$, donc

$$\begin{aligned}
\|r(h)\| &\leq \|dg(f(x)) \cdot (o(h))\| + \|o(df(x) \cdot h + o(h))\| \\
&\leq \|dg(f(x))\| \cdot \|o(h)\| + \|o(df(x) \cdot h + o(h))\|,
\end{aligned}$$

on a $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|df(x) \cdot h + o(h)\| = 0$, donc

$$\varepsilon(df(x) \cdot h + o(h)) = \varepsilon_1(h).$$

Posons $s(h) = \|o(df(x) \cdot h + o(h))\|$, donc

$$\begin{aligned}
s(h) &= \|df(x) \cdot h + o(h)\| \|\varepsilon(df(x) \cdot h + o(h))\| \\
&\leq (\|df(x) \cdot h\| + \|o(h)\|) \|\varepsilon(df(x) \cdot h + o(h))\| \\
&\leq (\|df(x)\| \cdot \|h\| + \|\varepsilon(h)\| \|h\|) \\
&\quad \times \|\varepsilon(df(x) \cdot h + o(h))\| \\
&\leq \|h\| \varepsilon_1(h).
\end{aligned}$$

D'où $r(h) = o(h)$, ainsi $g \circ f$ est différentiable en x et $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. \square

Corollaire 6.1. *Dans les conditions du théorème si les applications f et g sont de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, alors $g \circ f$ est de classe C^k .*

Corollaire 6.2. *Soit U un ouvert de E , supposons que $f : U \rightarrow F$ est différentiable en un point x de U , si de plus f^{-1} existe sur un ouvert V contenant $y = f(x)$ et si elle est différentiable en y , alors $df(x)$ est inversible et $(df(x))^{-1} = d(f^{-1})(y)$.*

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = I$ l'application identité, donc $I = dI(x) = d(f^{-1})(y) \circ df(x)$. D'où $(df(x))^{-1} = d(f^{-1})(y)$. \square

Remarque 6.3. Avec les hypothèses du corollaire précédant, les espaces E et F sont nécessairement de même dimension.

2. Dérivées partielles et applications continument différentiables.

2.1. Dérivée suivant un vecteur. Dans ce paragraphe E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \longrightarrow F$ une application et $x \in U$.

Définition 6.2. Soit $h \in E$ un vecteur non nul, si la limite suivante existe

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

alors elle sera notée $D_h f(x)$ ou $d_h f(x)$, et appelée dérivée suivant le vecteur (ou dérivée suivant la direction) h .

Proposition 6.2. Si $f : U \longrightarrow F$ est une application différentiable en un point $x \in U$, alors f admet une dérivée suivant tout vecteur non nul h et on a :

$$d_h f(x) = df(x) \cdot h .$$

Démonstration. Soit h vecteur non nul de E , on a pour un certain réel $r > 0$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi :]-r, r[&\longrightarrow F \\ t &\mapsto f(x + th) \end{aligned}$$

est bien définie, de plus $\varphi = f \circ g$, où

$$g :]-r, r[\longrightarrow E, t \mapsto x + th.$$

On a g est différentiable en 0, $g(0) = x \in U$ et f est différentiable en x , d'où φ est différentiable en 0 et

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} &= d\varphi(0) \\ &= df(x) \circ dg(0) \\ &= df(x) \cdot h . \quad \square \end{aligned}$$

Exemples 6.1. Soit

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Alors φ admet des partielles suivant toutes les directions au point $(0, 0)$ mais elle n'est pas différentiable au point $(0, 0)$. En effet, soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul,

- si $h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$, alors

$$\frac{\varphi((0,0) + t(h_1, h_2)) - \varphi((0,0))}{t} = 0$$

ainsi $d_h\varphi(0,0) = 0$,

- si $h_1 \neq 0$ et $h_2 \neq 0$, alors

$$\frac{\varphi((0,0) + t(h_1, h_2)) - \varphi((0,0))}{t} = t \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4}$$

d'où $d_h\varphi(0,0) = 0$.

- Maintenant si φ est différentiable en $(0,0)$, alors pour tout vecteur non nul $h \in \mathbb{R}^2$,

$$d\varphi(0,0) \cdot h = d_h\varphi(0,0) = 0 \implies d\varphi(0,0) = 0.$$

Or l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)$ est différentiable en 0 et $f(0) = (0,0)$, par suite $\varphi \circ f$ sera différentiable en 0 et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{\varphi(t^2, t) - \varphi(0,0)}{t} = d(\varphi \circ f)(0) \\ &= d\varphi(0,0) \circ df(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc φ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2.2. Dérivées partielles. Soient n et p deux entiers non nuls, U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Si la dérivée de f en un point x de U suivant le vecteur e_i existe, alors elle sera appelée la i -ème dérivée partielle (ou la dérivée partielle par rapport à x_i) de f en x et elle sera notée

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \text{ ou } D_i f(x).$$

Donc $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ est égale à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t}$$

Proposition 6.3. *On a si f est différentiable en un point $x \in U$, alors toutes les dérivées partielles existent et*

$$df(x) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \cdot h_n.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} df(x) \cdot (h_1, \dots, h_n) &= df(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \cdot df(x) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x). \quad \square \end{aligned}$$

D'après l'exemple 6.1 l'existence des dérivées partielles n'implique pas que l'application est différentiable. Mais on a

Théorème 6.2. *Soit U est un ouvert de \mathbb{R}^n , une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ et continument différentiable sur U si, et seulement si, ses dérivées partielles existent sur U et elles sont continues.*

Soit $\{e'_1, \dots, e'_p\}$ la base canonique de \mathbb{R}^p . Alors pour toute application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, on a

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

où $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la i -ème composante de f , c'est à dire $f_i = \pi_i \circ f$ où π_i est la i -ème projection. On a

Proposition 6.4. *L'application f est de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, si, et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq p$, f_i est de classe C^k .*

Démonstration. Les projections π_i , $1 \leq i \leq p$, sont linéaires donc elle sont de classe C^k . Si f est de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, $f_i = \pi_i \circ f$ est aussi de classe C^k . Inversement, si les f_i , $1 \leq i \leq p$, sont de classe C^k , l'écriture $f = f_1 e'_1 + \dots + f_p e'_p$ entraîne que f est de classe C^k . \square

2.3. Matrice jacobienne. Comme conclusion des résultats précédants on a

Corollaire 6.3. *Une application*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

est continument différentiable sur U si, et seulement si,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n$$

sont bien définies et continues.

Définition 6.3. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable en un point x de U , la matrice jacobienne de f au point x , notée $J(f)(x)$ est la matrice de $df(x)$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p respectivement, c'est à dire $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

La formule de compositions des différentielles permet d'obtenir la **règle de la chaîne** suivante

Proposition 6.5. *Soit U (resp. V) un ouvert de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^p) et soit $x \in U$. Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en x , $f(x) \in V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable en $f(x)$, alors pour tout $1 \leq k \leq q$*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g_k \circ f)(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial y_j} g_k(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x).$$

Démonstration. On a $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$, donc la matrice $J(g \circ f)(x)$ n'est autre que la matrice produit $J(g)(f(x)) \cdot J(f)(x)$. Donc les deux expressions de la k -ème colonne de la matrice $J(g \circ f)(x)$ donne le résultat. \square

3. C^k difféomorphismes.

Définition 6.4. Soit f une application bijective d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur un ouvert V de \mathbb{R}^n . Alors on dit que f est un

- 1) homéomorphisme ou C^0 -difféomorphisme si f et f^{-1} sont continus,
- 2) C^k -difféomorphisme, $k \geq 1$, si f et f^{-1} sont de classe C^k .

Remarque 6.4. Dans la définition précédente si on suppose que V est ouvert de \mathbb{R}^p et si f est un C^k -difféomorphisme, $k \in \mathbb{N}$, alors $p = n$ nécessairement. Pour $k \geq 1$, on a $df(x)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^p . Mais pour $k = 0$ la conclusion est difficile.

Théorème 6.3. (d'inversion locale) *Soit f une application de classe C^k , $k \geq 1$, sur un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , supposons que pour un certain point x de U , on a $df(x)$ est inversible, c'est à dire $|J(f)(x)| \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert $O \subseteq U$ de x et un voisinage ouvert V de $f(x)$, tels que la restriction de f à O est un C^k -difféomorphisme de O sur V .*

Démonstration. À admettre. \square

Corollaire 6.4. (d'inversion globale) *Avec les hypothèses du théorème précédent. Supposons de plus que f est injective sur U et pour tout $x \in U$, $|J(f)(x)| \neq 0$, alors $f(U)$ est un ouvert et*

$$f : U \rightarrow f(U)$$

est un C^k -difféomorphisme.

Démonstration. Exercice. \square

Une conséquence du théorème d'inversion locale on a le théorème important suivant

Théorème 6.4. (fonctions implicites) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et soit

$$f : O \longrightarrow \mathbb{R}^p, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

une application de classe C^k , $k \geq 1$, si pour un certain $(a, b) \in O$ on a $f(a, b) = 0$, alors il existe

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a ,
- $V \subseteq \mathbb{R}^p$ voisinage ouvert de b ,
- $U \times V \subseteq O$,
- une unique application $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^k telle que $\varphi(a) = b$ et pour tout $x \in U$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Démonstration. Soit

$$\Phi : O \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p; (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

On a Φ est de classe C^k et on a

$$J(\Phi)(x) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donc $|J(\Phi)(a, b)| = |I_n| \cdot \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right| \neq 0$, ainsi il existe un voisinage $U' \times V \subseteq O$ de (a, b) tel que Φ est un C^k -difféomorphisme de O' sur un voisinage ouvert de $(a, 0)$ contenant un voisinage de $(a, 0)$ de la forme $U \times U'$. Donc l'application

$$\varphi : U \longrightarrow V; x \mapsto \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, 0)$$

est de classe C^k et $f(x, \varphi(x)) = 0$. L'unicité découle du fait que s'il existe une autre application ψ définie de U dans V vérifiant les mêmes propriétés que φ alors

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, f(x, \psi(x))) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, 0) \\ &= \varphi(x). \quad \square \end{aligned}$$

Exemples 6.2. Cas particuliers.

I) Courbes dans \mathbb{R}^2 . Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, une application de classe C^k , $k \geq 1$, supposons qu'il existe $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) \neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert I centré en a , un intervalle ouvert J centré en b et une fonction unique $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^k tels que $\varphi(a) = b$, $I \times J \in U$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Donc

au voisinage de (a, b) , l'équation $f(x, y) = 0$ définie une courbe possédant une paramétrisation de la forme $z = \varphi(x)$. De plus la **tangente** en (a, b) est d'équation :

$$(x - a) \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0.$$

II) Surfaces dans \mathbb{R}^3 . Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 , et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une application de classe C^k , $k \geq 1$, supposons qu'il existe $(a, b, c) \in U$ tel que $f(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} f(a, b, c) \neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert I centré en a , un intervalle ouvert J centré en b , un intervalle ouvert K centré en c et une fonction unique $\varphi : I \times J \rightarrow K$ de classe C^k tels que $\varphi(a) = b$, $I \times J \times K \in U$ et $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in I \times J$. Donc au voisinage de (a, b, c) , l'équation $f(x, y, z) = 0$ définie une surface possédant une paramétrisation de la forme $z = \varphi(x, y)$. De plus le plan **tangent** en (a, b, c) est d'équation :

$$(x - a) \frac{\partial}{\partial x} f(a, b, c) + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} f(a, b, c) + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} f(a, b, c) = 0.$$

III) Courbes dans \mathbb{R}^3 . Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 , et soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, deux applications de classe C^k , $k \geq 1$, supposons qu'il existe $(a, b, c) \in U$ tel que $f(a, b, c) = 0$, $g(a, b, c) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a, b, c) \cdot \frac{\partial}{\partial z} g(a, b, c) - \frac{\partial}{\partial z} f(a, b, c) \cdot \frac{\partial}{\partial y} g(a, b, c) \neq 0.$$

Alors il existe un intervalle ouvert I centré en a , un intervalle ouvert J centré en b , un intervalle ouvert K centré en c et un unique couple de fonctions (φ, ψ) avec $\varphi : I \rightarrow K$, $\psi : J \rightarrow K$ de classe C^k tels que $(\varphi(a), \psi(a)) = (b, c)$, $I \times J \times K \in U$ et $f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Donc au voisinage de (a, b, c) , le système $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ définit une courbe possédant une paramétrisation de la forme $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. De plus la **tangente** en (a, b, c) est d'équations :

$$(x - a) \frac{\partial}{\partial x} f(a, b, c) + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} f(a, b, c) + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} f(a, b, c) = 0.$$

$$(x - a) \frac{\partial}{\partial x} g(a, b, c) + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} g(a, b, c) + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} g(a, b, c) = 0.$$

4. Dérivées partielles d'ordre supérieure.

4.1. Théorème de Schwarz.

Théorème 6.5. (de Schwarz) Soit f une application définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , si

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

existent et continues sur un voisinage de x alors elles sont égales.

Corollaire 6.5. *Soit f une application définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , si*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f \text{ et } \frac{\partial^k}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} f,$$

où σ est une permutation de $\{1, \dots, k\}$, existent et continuent sur un voisinage de x alors elles sont égales.

Démonstration. Toute permutation est une composition de transpositions de la formes $(i, i + 1)$. \square

4.2. Expression des différentielles d'ordre supérieure. Si f une application de classe C^k , $k \geq 1$, sur un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , alors la différentielle, $D^m f(x)$, d'ordre m , $1 \leq m \leq k$, de f en un point quelconque x de U est une application n -linéaire symétrique de $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p associant à un m -uplet (h_1, \dots, h_m) l'élément $D^m f(x) \cdot (h_1, \dots, h_m)$, notée $D^m f(x) \cdot h_1 \cdots h_m$, donnée par l'expression :

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}.$$

En effet, l'élément $D^m f(x) \cdot h_1 \cdots h_m$ n'est autre que la dérivée, d'ordre m , au point 0 de l'application $\varphi : t \mapsto f(x + th)$. Donc

$$\begin{aligned} \varphi^1(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + th) h_i \\ \varphi^2(t) &= \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + th) h_j \\ &= 2 \sum_{i+j=2} \frac{h_i^i \cdot h_j^j}{i! \cdot j!} \frac{\partial^2}{\partial x_i^i \partial x_j^j} f(x + th) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi^m(t) &= m! \cdot \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^m f(x+th)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

4.3. Formule de Taylor-Young.

Théorème 6.6. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $x \in U$,*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

une application admet une différentielle d'ordre $m + 1$, $m \geq 1$, alors pour $h \in \mathbb{R}^n$ assez petit on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) \\ &+ \sum_{r=1}^m \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \frac{h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) \\ &+ o(\|h\|^m). \end{aligned}$$

Démonstration. Dans les conditions du théorème. Soit f_i la i -ème composante de f , posons

$$\varphi_i : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f_i(x + th).$$

Alors φ_i admet une dérivée d'ordre $m + 1$, ainsi elle vérifie la formule de Taylor-Young "classique", c'est à dire pour un certain $\theta \in [0, 1]$

$$\varphi_i(1) = \varphi_i(0) + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} \varphi_i^{(r)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi_i^{(m+1)}(\theta).$$

Or on a pour $r \in \{1, \dots, m+1\}$,

$$\varphi_i^{(r)}(t) = r! \cdot \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \frac{h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f_i(x + th).$$

Donc la formule Taylor-Young est vérifiée pour toute composante f_i , ainsi elle est vraie pour f .

□

5. Extremums relatifs.

Définition 6.5. Soit f une application définie d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On dit que f présente en un point a de U :

- un maximum local s'il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que $f(x) - f(a) \leq 0$, $x \in V$,
- un minimum local s'il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que $f(x) - f(a) \geq 0$, $x \in V$,
- un extremum local si f présente en a un maximum local ou un minimum local.

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'un point soit un extremum local.

Proposition 6.6. Soit f une fonction de classe C^k , $k \geq 1$, définie d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Si un point a de U est un extremum local de f , alors a est un point critique de f c'est à dire $df(a) = 0$.

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Le point 0 est un extremum local des fonctions $\varphi_i : t \mapsto f(a + te_i)$, ainsi $\varphi'_i(0) = 0$ $1 \leq i \leq n$. D'où les dérivées partielles de f au point a sont toutes nulles, donc $df(a) = 0$. \square

Voici une condition suffisante.

Proposition 6.7. *Considérons une fonction f de classe C^k , $k \geq 2$, définie d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Soit $a \in U$, si pour tout vecteur non nul h de \mathbb{R}^n , on a $d^2f(a) \cdot h \cdot h$ est strictement positif (resp. strictement négatif), alors f présente au point a un minimum local (resp. maximum local).*

Démonstration. Découle du fait que pour $\|h\|$ assez petit $f(a+h) - f(a)$ et $d^2f(a) \cdot h \cdot h$ sont de même signe, car

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= df(a) \cdot h + \frac{1}{2}d^2f(a) \cdot h \cdot h \\ &\quad + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2}d^2f(a) \cdot h \cdot h + \|h\|^2\varepsilon(h). \quad \square \end{aligned}$$

6. Série n° 6.

Exercice 1. Soient $U =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \times \{0\}$, $P : U \rightarrow V; (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $C : V \rightarrow U; (x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}))$.

- 1) Vérifier que S et P sont de classe C^1 .
- 2) Calculer $P \circ S$ et $S \circ P$.
- 3) Calculer la jacobienne et le jacobien de P en tout point x de U .
- 4) Calculer de deux manières la jacobienne et le jacobien de S en tout point $y = f(x)$ de V .

Exercice 2. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que : $(*) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

- 1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. Montrer que φ est un C^∞ -difféomorphisme.
- 2) Soit $V = \varphi(U)$, est $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g \circ \varphi = f$, calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g (ind. utiliser la règle de la chaîne). Déduire les solutions de $(*)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \|x\|_2$. Montrer que f est différentiable en tout point $x \neq 0$ est $df(x) \cdot h = \langle \frac{x}{\|x\|_2}, h \rangle$.

Exercice 4. Soit $S(r, \theta, \varphi) = (r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi))$, $(r, \theta, \varphi) \in U = \mathbb{R}_*^+ \times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$.

- 1) Vérifier que S est de classe C^∞ .
- 2) Calculer la jacobienne et le jacobien de S en tout point U .
- 3) Vérifier que $S(U)$ est un ouvert et que S est un C^∞ -difféomorphisme de U sur $S(U)$.

Exercice 5. 1) Montrer que au voisinage de $(0, 0)$, l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arctan(xy) + 1 = e^{x+y}\}$$

admet une représentation de la forme $y = \varphi(x)$, $x \in I$ avec I un intervalle centré en 0 et φ est de classe C^1 sur I .

- 2) Donner l'équation de la droite tangente à Γ au point $(0, 0)$.

Exercice 6. 1) Montrer que au voisinage de $(1, 1, 1)$, l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^3 + 2xz - y = 2\}$$

admet une représentation de la forme $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in I$ avec I un intervalle centré en 1 et φ et ψ sont de classe C^1 sur I .

- 2) Donner les équations de la droite tangente à Γ au point $(1, 1, 1)$.